Série 3

Exercice 1

Calcule toutes les primitives des fonctions suivantes.

$a(x) = 16x \cdot (3x-1) \cdot (2x^3 - x^2 + 2)^7$

$b(x) = \dfrac{15}{\cos^2(3x)} - 10\sin(5x)$

$c(x) = \dfrac{7}{x^2+9}$

$d(x) = -7\sqrt[4]{(5-2x)^3}$

Exercice 2

Démontre la proposition :

Si f est une fonction impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors toutes ses primitives sont paires sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

À partir du temps $t = 0$, on verse de l'eau dans un récipient initialement vide avec un débit instantané $d(t) = 2t$ litres par minute.

Simultanément, une partie de cette eau s'échappe avec un débit instantané $v(t) = t^2$ litres par minute, par un trou situé au fond du récipient.

(1) Quel volume d'eau le récipient contient-il après 1 minute ?

(2) A quel moment le volume d'eau dans le récipient sera-t-il maximal ?

(3) A quel moment le récipient sera-t-il à nouveau vide ?

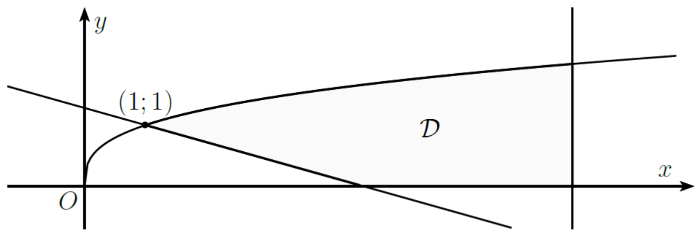
(4) Esquisse le graphe de la fonction V exprimant le volume d'eau contenu dans le récipient en fonction du temps t mesuré en minutes, pour t compris entre 0 et l'instant où le récipient est à nouveau vide.

Exercice 4

Les graphes des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

ainsi que la droite d d'équation $x = 8$ sont représentés ci-après dans une système d'axes Oxy.



(1) Calcule l'aire géométrique du domaine fermé $\mathcal{D}$ compris entre les graphes de f et de g, la droite d et l'axe Ox dans le I^er quadrant.

(2) Calcule le volume du corps de révolution résultant de la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe Oy.

Exercice 5

Une boule de camphre exposée à l'air libre diminue de volume, tout en gardant sa forme sphérique.

La perte de volume est proportionnelle à sa surface externe.

Le diamètre de la boule est initialement de 20mm. Il passe à 16mm après six mois.

(1) Déterminer $d(t)$ exprimant le diamètre d en mm en fonction du temps t en mois.

(2) Après combien de mois le diamètre est-il égal à 10mm ?

(3) Après combien de mois la boule disparaît-elle ?

Exercice 6

Cinématique

D'un pont surplombant une gorge, on lâche une pierre qui est alors soumise à une accélération constante de 9.8 m/s^2. Le bruit de l'impact avec l'eau est entendu sur le pont après 5.6 secondes. Sachant que la vitesse du son est de 330 m/s, calcule le temps de chute t_c de la pierre ainsi que la hauteur h du pont.

Indication :

Détermine la fonction $d(t)$, définie sur $[0, t_c]$, donnant la distance parcourue par la pierre après t secondes de chute et déduis-en une relation entre les valeurs cherchées.

Fais de même avec la fonction $m(t)$, définie sur $[0, 5.6 - t_c]$, donnant la distance parcourue par le son t secondes après l'impact de la pierre au fond de la gorge.