Corrigé série 2

Exercice 1 (2 points)

Il faut commencer par choisir l'ordre des couleurs, puis pour chaque dé quelle face sera sur le dessus. On obtient donc

$$5! \cdot 6^5 = 933'120 \text{ possibilités.}$$

Exercice 2 (5 points)

S'il fait les 5 visites le même jour, il a $5! = 120$ possibilités.

S'il fait trois visites le premier jour, il a $\binom{5}{3}$ choix de clients pour le premier jour, 3! possibilités d'ordre de visite de ces trois clients et 2 ordres différents pour les deux visites du lendemain. Il y a donc $\binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 2 = 120$ possibilités.

Exercice 3 (5 points)

Il y a $C_2^5 = 10$ choix possibles pour les hommes. Pour les femmes il y a $C_3^7 = 35$ possibilités. Finalement il y a donc $10 \cdot 35 = 350$ comités possibles.

Si deux femmes ne veulent pas siéger ensemble, il faut retrancher les comités où c'est le cas, il y a $C_2^5 \cdot C_1^5 = 50$ tels comités et donc $350 - 50 = 300$ possibilités.

Exercice 4 (10 points)

a) Il y en a $10! = 3'628'800$.

b) On a $3! = 6$ choix pour Pierre, Paul et Jacques, $7! = 5040$ choix pour les 7 autres personnes, et 8 choix pour placer le trio entre les autres personnes (ou tout devant, ou tout derrière). On obtient donc $3! \cdot 7! \cdot 8 = 3! \cdot 8! = 241'920$ choix possibles.

c) On a 7 choix pour la première place, 6 choix pour la dernière place et 8! choix pour ceux du milieu (Pierre, Paul et Jacques ne se suivent plus forcément). On obtient donc $7 \cdot 6 \cdot 8! = 1'693'440$ choix possibles.

Exercice 5 (5 points)

Premièrement on remarque que tous les chemins de A à B où à chaque croisement on choisit d'aller à droite ou de monter ont la même longueur minimale de 11 unités. Il s'agit donc de compter le nombre de ces chemins. Dans un de ces chemins, il y a 4 segments verticaux à placer, une fois qu'ils sont placés, il n'y a plus de choix pour placer les segments horizontaux. Ainsi le nombre de chemins minimaux est égal au nombre de façons de choisir 4 parmi 11, autrement dit $C_4^{11} = 330$. On remarque que l'on peut également commencer par placer les segments horizontaux, auquel cas il y a $C_7^{11} = 330$ possibilités.

Exercice 6 (5 points)

a) L'ordre n'est pas imporant, donc $C_4^{25} = 12'650$ possibilités

b) Ici, l'ordre est important puisque chaque personne du comité a un rôle, donc $A_4^{25} = 303'600$ possibilités.

Exercice 7 (5 points)

a) L'ordre n'est pas important, donc $C_8^{10} = 45$ choix.

b) i) Il doit faire les 3 premiers, donc il doit encore en choisir 5 parmi 7 : $C_5^7 = 21$ choix.

ii) On sépare en deux cas : s'il fait exactement 4 des 5 premiers problèmes, il doit encore en choisir 4 parmi les 5 autres, donc il a $C_4^5 \cdot C_4^5 = 25$ choix. S'il fait les 5 premiers problèmes, il doit encore en choisir 3 parmi les 5 autres, donc $C_3^5 = 10$ choix.
Il a donc au total $25 + 10 = 35$ choix.

Exercice 8 (10 points)

a) i) Il y en a $1 \cdot 7 \cdot 4 = 28$.

ii) On a 4 choix pour le couteau du troisième tirage, donc il reste 11 choix pour le premier tirage et 10 choix pour le deuxième tirage. On obtient $4 \cdot 11 \cdot 10 = 440$ choix.

iii) On a 3 choix pour la cuillère (1ère, 2ème ou 3ème tirages), puis 11 choix et 10 choix pour les autres. On obtient donc $3 \cdot 11 \cdot 10 = 330$ choix.

iv) On sépare le cas avec 2 fourchettes et le cas avec 3 fourchettes :
Cas 2 fourchettes : on a 5 choix pour l'autre ustensile, et trois places possibles. On a ensuite 7 et 6 choix pour les fourchettes. On obtient $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 630$ choix
Cas 3 fourchettes : on a $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ choix.
On obtient au total : $630 + 210 = 840$ choix possibles.

b) i) Il y en a $1 \cdot 7 \cdot 4 = 28$.

ii) Cas 3 fourchettes : $C_3^7 = 35$ choix
Cas 3 couteaux : $C_3^4 = 4$ choix
On obtient au total $35 + 4 = 39$ choix possibles.

iii) On obtient $C_1^1 \cdot C_2^{11} = 55$ choix possibles.

Exercice 9 (5 points)

a) On doit encore choisir une carte parmi les 32 autres : $C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32$ possibilités.

b) 2 as, 2 rois et une autre : $C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = 1008$ possibilités.
3 as, 2 rois ou 2 as, 3 rois : $2 \cdot C_3^4 \cdot C_2^4 = 48$ possibilités.
Total : $1008 + 48 = 1056$ possibilités.

c) Tous les cas - 0 as $= C_5^{36} - C_5^{32} = 376992 - 201376 = 175'616$ possibilités.

Exercice 10 (5 points)

a) Les timbres sont forcément bleus : $C_4^5 = 5$ possibilités

b) 2R,1B,1V + 1R,2B,1V + 1R,1B,2V $= C_2^3 \cdot C_1^5 \cdot C_1^2 + C_1^3 \cdot C_2^5 \cdot C_1^2 + C_1^3 \cdot C_1^5 \cdot C_2^2 = 105$ possibilités

Exercice 11 (10 points)

a) Chaque jour il a 3 choix de fleurs, donc on obtient $3^7 = 2187$ choix. Il peut tenir 2187 semaines.

b) i) Cas aucune rose : $2^7 = 128$, donc on obtient $2187 - 128 = 2059$ semaines avec au moins une rose.

ii) Il faut choisir quel jour il achète une rose (C_3^7 choix), puis quel fleur il achète les autres jours (2^4). On obtient $C_3^7 \cdot 1^3 \cdot 2^4 = 560$ semaines.

iii) Il faut choisir quel jour il achète quelle fleur. On commence par choisir les roses (C_3^7), puis les iris (C_2^4), puis les oeillets (C_2^2). On obtient $C_3^7 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2 = 210$ semaines.

Exercice 12 (5 points)

Toutes les possibilités sont $\binom{2}{2,0,0} = 1$, $\binom{2}{0,2,0} = 1$, $\binom{2}{0,0,2} = 1$, $\binom{2}{1,1,0} = 2$, $\binom{2}{1,0,1} = 2$, $\binom{2}{0,1,1} = 2$ et donc on peut calculer $(x+y+z)^2$ à l'aide du théorème du cours

$$(x+y+z)^2 = 1\cdot x^2y^0z^0 + 1\cdot x^0y^2z^0 + 1\cdot x^0y^0z^2 + 2\cdot x^1y^1z^0 + 2\cdot x^1y^0z^1 + 2\cdot x^0y^1z^1 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Exercice 13 (5 points)

Par un résultat du cours, on doit calculer la quantité suivante

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)} \binom{7}{n_1, n_2, n_3} \overset{\text{thm}}{=} (1+1+1)^7 = 2187.$$

Il y a donc 2187 manières de distribuer les cadeaux. Si Kay en reçoit 3, il faut choisir ces 3 cadeux, puis calculer le nombre de façons différentes de distribuer 4 cadeaux à deux personnes.

$$\binom{7}{3} \cdot \sum_{(n_1,n_2)} \binom{4}{n_1, n_2} = \binom{7}{3} \cdot (1+1)^4 = 560.$$

Exercice 14 (5 points)

Dans le premier cas, on applique à nouveau le théorème 1.4 afin de calculer

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3,n_4)} \binom{8}{n_1, n_2, n_3, n_4} = (1+1+1+1)^8 = 65536$$

qui est le nombre de possibilités de répartir 8 tableaux noirs dans 4 écoles.

Exercice 15 (5 points)

a) $\dfrac{C_3^4}{C_3^{36}} = \dfrac{4}{7140} = 0,056\%$

b) $\dfrac{C_2^4 \cdot C_1^4}{C_3^{36}} = \dfrac{24}{7140} = 0,336\%$

c) P(au moins un valet)$=1-$P(0 valet)$= 1 - \dfrac{C_3^{32}}{C_3^{36}} = 1 - \dfrac{4960}{7140} = \dfrac{2180}{7140} = 30,53\%$

Exercice 16 (5 points)

On suit l'indication, donc l'ensemble fondamental est $\binom{26}{13}$. Ensuite, il faut choisir 3 carreaux parmi les 5 restants et 10 autres parmi les 21 autres restantes. On obtient donc

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} \approx 0.339.$$

Exercice 17 (5 points)

Si $x \in \bigcap_{i=1}^n E_i^c$, alors $x \in E_i^c$ pour tout i. Ainsi, $x \notin E_i$ pour tout i, donc $x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i$. Par conséquent, $x \in (\bigcup_{i=1}^n E_i)^c$.

Exercice 18 (10 points)

a) Appelons CP l'ensemble formé du comité et du président.

Cet ensemble contient entre 1 et n membres. Pour une quantité de membres $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixée, combien y a-t-il de CP possibles ?

On choisit d'abord k membres parmi les n personnes du groupe, soit $\binom{n}{k}$ choix. Ensuite, parmi ces k personnes, on choisit un président, soit k choix. Ainsi, il y a

$$k\binom{n}{k}$$

choix de CP possibles pour un k fixé.

Le nombre total de CP possibles est donc

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

b) Supposons que l'on ait démontré la formule

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = (n-1)2^{n-2},$$

que nous allons utiliser pour démontrer

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

ce qui établira la récurrence.

La vérification que l'on présente ici sera un simple calcul, il utilisera l'hypothèse de récurrence ainsi que les deux formules

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

La première formule se vérifie facilement en remplaçant les termes par leur définition. La deuxième est une simple application de la formule du binôme de Newton.

Avec ces deux formules, le pas de récurrence se résume à calculer explicitement (en faisant attention aux indices !)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k} \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(k\binom{n-1}{k-1} + k\binom{n-1}{k}\right) \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k-1} + (n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{l=0}^{n-2} l\binom{n-1}{l} + 2^{n-1} - 1 \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} l\binom{n-1}{l} - (n-1) + 2^{n-1} - 1 \\
&= 2^{n-2}(n-1) - (n-1) + 2^{n-1} - 1.
\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= n + 2^{n-2}(n-1) - (n-1) + 2^{n-1} - 1 + (n-1)2^{n-2} \\
&= n2^{n-1}.
\end{aligned}$$

c) On choisit d'abord le président (n choix), puis, successivement, on décide si on ajoute ou non chacune des $n-1$ personnes restantes dans le comité (cela mène à deux possibilités (ajout/pas ajout) pour chaque personne restante, et donc à 2^{n-1} possibilités au total).

Ainsi, le nombre total de choix possibles est bien

$$n2^{n-1}.$$