Solutions
Semaine 3

Cours Turing+

1 Circuit de Deutsch

a) Comme mentionné dans le cours, l'état du second qubit n'est pas modifié par la porte U_f: il est donc dans l'état $|-\rangle$ (ce que vous pouvez plus ou moins vérifier expérimentalement en mesurant celui-ci : il sera dans l'état $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ approximativement la moité du temps).

b) L'état de sortie global est toujours un état produit (quelle que soit la fonction f) :

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{2} \sum_{x\in\{0,1\}} (-1)^{f(x)} |0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{x\in\{0,1\}} (-1)^{f(x)+x} |1\rangle \right) \otimes |-\rangle$$

mais il est plus difficile de vérifier ceci expérimentalement...

c) Sans la dernière porte H, l'état de sortie vaut $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x\in\{0,1\}} (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes |-\rangle$ et si vous mesurez l'état du premier qubit à ce stade, alors le résultat sera $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ avec probabilité $1/2$, indépendamment de la fonction f (ce qui se vérifie bien expérimentalement). La dernière porte H est donc absolument nécessaire au bon fonctionnement du circuit.

d) Dans ce cas, le second qubit sera dans l'état $|+\rangle$ et non l'état $|-\rangle$ au passage de la porte U_f. Vous pouvez vérifier alors que le passage par cette porte n'aura aucune influence sur l'état global du système, et donc encore moins sur le premier qubit. Résultat des courses : après le passage par la dernière porte H, le premier qubit reviendra dans son état initial $|0\rangle$, indépendamment de la fonction f, ce que vous pouvez encore une fois vérifier expérimentalement. En conclusion, le circuit ne nous apprend rien non plus dans ce cas.

2 Portes de Hadamard bruitées

a) Vous pouvez vérifier que

$$H_\varepsilon H_\varepsilon^T = H_\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} & \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} & -\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} & \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} & -\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{1+\varepsilon}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Lorsque $|x\rangle = |0\rangle$, la porte CNOT n'agit pas, et donc dans ce cas, le qubit $|y\rangle$ reste inchangé également (vu qu'il passe deux fois par la même porte réversible H_ε).

Par contre, lorsque $|\psi_0\rangle = |x, y\rangle = |1, 0\rangle$, on obtient la succession d'états :

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\,|1\rangle \right)$$

$$|\psi_2\rangle = |1\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\,|1\rangle + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\,|0\rangle \right)$$

$$|\psi_3\rangle = |1\rangle \otimes \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\,|0\rangle - \frac{1+\varepsilon}{2}\,|1\rangle + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\,|0\rangle + \frac{1-\varepsilon}{2}\,|1\rangle \right) = |1\rangle \otimes \left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,|0\rangle - \varepsilon\,|1\rangle \right)$$

Ainsi, dans ce cas, la probabilité d'observer le second qubit dans l'état $|0\rangle$ vaut $1-\varepsilon^2$ (et non plus 1 comme dans le cas sans bruit), et celle de l'observer dans l'état $|1\rangle$ vaut ε^2 (et non 0).

Le cas où $|\psi_0\rangle = |x, y\rangle = |1, 1\rangle$ est similaire :

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\,|1\rangle \right)$$

$$|\psi_2\rangle = |1\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\,|1\rangle - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\,|0\rangle \right)$$

$$|\psi_3\rangle = |1\rangle \otimes \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\,|0\rangle - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\,|1\rangle - \frac{1+\varepsilon}{2}\,|0\rangle - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\,|1\rangle \right) = |1\rangle \otimes \left(-\varepsilon\,|0\rangle - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|1\rangle \right)$$

Ici aussi, les probabilités ne valent plus tout à fait 0 et 1, et l'état de sortie global est multiplié par -1.