

Corrigé 1

Exercice 1

Une fonction intégrable. On considère la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$.

- (1) $f(x) = x^2$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ fermé et borné, donc elle est intégrable.
- (2) Nous avons vu qu'il suffit de considérer les sommes de Darboux définies sur une subdivision régulière σ_n . Calculons la somme de Darboux supérieure sur σ_n . Puisque f est croissante sur $[0, 1]$, le supremum sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est atteint en x_{i+1} si bien que

$$S_n(x^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} (x_{i+1})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

La limite de cette expression lorsque n tend vers l'infini vaut $1/3$. Le calcul de la somme de Darboux inférieure est identique si bien que f est intégrable sur $[0, 1]$.

- (3) Soit σ une subdivision de $[0, 1]$ de pas inférieur à ε . Soit $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et soit

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_i)^2$$

la somme de Riemann associée à ces choix. Calculons la différence de R et de la somme de Darboux supérieure

$$S_\sigma(x^2) - R = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(x_{i+1})^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)y_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(x_{i+1}^2 - y_i^2)$$

Or, la différence $x_{i+1}^2 - y_i^2 = (x_{i+1} - y_i)(x_{i+1} + y_i) \leq 2(x_{i+1} - y_i) \leq 2\varepsilon$. Ainsi la différence $S_\sigma(x^2) - R$ est plus petite que 2ε . Elle est donc arbitrairement petite (en fait pour faire plus propre on aurait dû ré-écrire la preuve en remplaçant ε par la moitié : ceci montre que pour tout ε on peut choisir un pas de subdivision assez petit en sorte que la différence de toute somme de Riemann et de la somme de Darboux supérieure est inférieure à ε).

La limite des sommes de Riemann tend donc vers la limite des sommes de Darboux supérieures, qui existe.

- (4) Une primitive de x^2 est donnée par $\frac{1}{3}x^3$. Par conséquent le Théorème fondamental du calcul intégral nous apprend que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 1/3$.

Exercice 2

Compléments au cours.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Comme dans le cours nous utiliserons le fait que sur tout sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a, b]$ la différence entre la borne supérieure F_i et la borne inférieure f_i de f est égale à

$$\sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

c'est-à-dire la plus grande différence entre deux valeurs de f sur cet intervalle (sa borne supérieure pour être précis).

- (1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et σ une subdivision de $[a, b]$. On considère la fonction $\lambda \cdot f$. Appelons H_i la borne supérieure de λf et h_i la borne inférieure sur $[x_i, x_{i+1}]$. Comme

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|$$

On voit que

$$H_i - h_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |\lambda f(x) - \lambda f(y)| = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| = |\lambda| \cdot (F_i - f_i)$$

Ainsi la différence entre les sommes de Darboux supérieures et inférieures vaut

$$S_\sigma(\lambda f) - s_\sigma(\lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(H_i - h_i) = |\lambda| \cdot (S_\sigma(f) - s_\sigma(f))$$

Puisque f est intégrable, la différence des sommes de Darboux supérieure et inférieure tend vers 0 lorsque le pas tend vers 0. C'est encore le cas lorsqu'on multiplie par λ , si bien que λf est intégrable.

- (2) On répète le même argument en remplaçant l'égalité $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|$ par l'inégalité

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{g(x)g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{c^2}$$

Exercice 3

Une fonction intégrable non continue. On définit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ on pose $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $f(0) = 1$.

(1) Il s'agit d'une fonction "en escaliers" qui vaut 1 entre $1/2$ et 1, $1/2$ entre $1/4$ et $1/2$, etc. Les points de discontinuité sont tous les $\frac{1}{2^n}$ avec $n \geq 1$ et encore le point 0. En effet $f(1/2^n) = 1/2^n$, mais $\lim_{x \rightarrow 1/2^n_+} f(x) = 1/2^{n-1}$. De même $f(0) = 1$, mais $\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = 0$.

(2) Cette fonction n'est pas continue par morceaux car dans la définition de continuité par morceaux on demande qu'il y ait un nombre fini de points de discontinuité. Par contre, si $\varepsilon > 0$, la fonction f est continue par morceaux sur $[\varepsilon, 1]$ puisque dans ce cas cette condition de finitude est satisfaite : seuls un nombre fini de $1/2^n$ sont plus grand que ε .

(3) L'aire déterminée par le graphe de f est égal à la somme infinie

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}}$$

C'est donc la limite des $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k-1}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 1$. Il s'agit d'une suite croissante et bornée : elle converge (vers $\frac{2}{3}$). La fonction f est donc intégrable sur $[0, 1]$.

(4) La fonction f est une fonction strictement positive (car nous avons pris garde de définir $f(0) = 1$), mais elle prend des valeurs arbitrairement petites. La fonction $1/f$ n'est pas intégrable car l'aire de la surface déterminée par son graphe se calcule de manière analogue comme somme infinie

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

qui diverge.

Exercice 4

Changement de variables. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La *substitution* $z = g(x)$ donne la formule du changement de variables :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

- (1) Lorsque $z = x^2$, une simple dérivation donne “ $dz = 2xdx$ ”. D’autre part si $x = 0$, $z = 0$ et si $x = 3/2$, $z = 9/4$. Ainsi on calcule

$$\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx = \int_0^{9/4} \frac{2}{1+z}dz = 2\ln(1+z)\Big|_0^{9/4} = 2\ln(13/4)$$

- (2) Comme la dérivée de $1+x^2$ est $2x$, une primitive de $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ est donnée par $2\ln(1+x^2)$. Ainsi

$$\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx = 2\ln(1+x^2)\Big|_0^{9/4} = 2\ln(13/4)$$

- (3) L’aire d’un rectangle de base $[a, a+\varepsilon]$ et de hauteur $f(b) = \frac{4b}{1+b^2}$ vaut bien sûr $A = \frac{4b\varepsilon}{1+b^2}$.

- (4) La substitution $z = x^2$ envoie a sur a^2 , $a+\varepsilon$ sur $(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2$ et b sur b^2 .

- (5) L’aire du rectangle de base $[a^2, a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2]$ et de hauteur $\frac{2}{1+b^2}$ vaut alors $A' = \frac{2(2a\varepsilon + \varepsilon^2)}{1+b^2}$. Ce rectangle est l’image du rectangle précédent via le changement de variables $z = x^2$.

- (6) Calculons le quotient

$$\frac{A}{A'} = \frac{4b\varepsilon(1+b^2)}{2(2a\varepsilon + \varepsilon^2)(1+b^2)} = \frac{4b}{4a + 2\varepsilon}$$

Lorsque $b = a + \varepsilon/2$, ce quotient est égal à 1. Ainsi l’aire $A' = A$.

- (7) Par conséquent les sommes de Riemann permettant de calculer $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx$ et celles permettant de calculer $\int_0^{9/4} \frac{2}{1+z}dz$ convergent vers la même valeur. En effet on calcule une limite de sommes d’aires de rectangles, qui sont égales pour un choix adéquat de points y_i (le point b ci-dessus). Ceci est illustré ici :

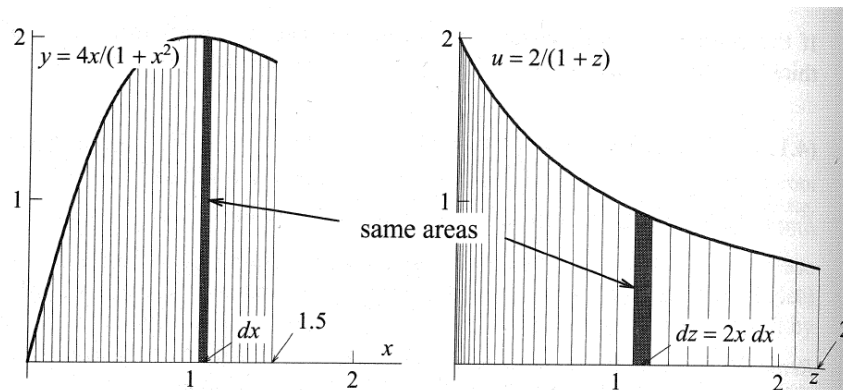


FIGURE 4.5. Substitution of a variable in an integral

$$\begin{aligned} \int_0^{1.5} \frac{2}{1+x^2} \cdot 2x \, dx &= \int_0^{2.25} \frac{2}{1+z} \, dz = 2 \cdot \ln(1+z) \Big|_0^{2.25} \\ &= 2 \cdot \ln(1+x^2) \Big|_0^{1.5} = 2 \ln(3.25). \end{aligned}$$

Fig. 4.5 illustrates the transformation $z = x^2$ and the functions $4x/(1+x^2)$ and $2/(1+z)$. Points x and $x + \Delta x$ are mapped to $z = x^2$ and $z + \Delta z = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$. Therefore, the shaded rectangles have, for $\Delta x \rightarrow 0$, the same areas, and both integrals in (4.14) give the same value.

Exercice 5

Vrai/Faux ?

- (1) VRAI. En effet cette fonction *continue* atteint son minimum m sur l'intervalle fermé $[a, b]$, si bien que le critère d'intégrabilité de la fonction $1/f$ s'applique.
- (2) FAUX. Le problème est que f peut prendre des valeurs arbitrairement petites si elle n'est pas continue. Nous avons vu un contre-exemple dans l'exercice 3.
- (3) FAUX. Une adaptation de la fonction de Dirichlet permet facilement de construire un contre-exemple. Posons par exemple $f(x) = 1$ lorsque x est rationnel et $f(x) = 10$ lorsque x ne l'est pas. La limite des sommes de Darboux supérieures vaut alors $10(b-a)$ et celle des sommes de Darboux inférieures $(b-a)$.
- (4) FAUX. La limite de toute sommes de Riemann pour un choix de subdivisions dont le pas tend vers zéro peut valoir n'importe quoi entre 0 et 1. Choisissons un nombre quelconque entre 0 et 1, disons $1/\pi$ et construisons f de la manière suivante. On pose $f(x) = 1$ lorsque x n'est pas rationnel et si $x = p/q$ avec p et q premiers entre eux (la fraction est irréductible), alors on pose $f(x) = 0$ lorsque q est une puissance de 2 et $f(x) = 1/\pi$ sinon.

On affirme que dans tout sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de $[0, 1]$ se trouve un nombre irrationnel (ce qui est évident), un nombre rationnel dont le dénominateur est une

puissance de 2 (puisque $1/2^n$ devient arbitrairement petit lorsque n devient grand) et un nombre rationnel dont le dénominateur ne l'est pas. Il suffit de choisir l'un de ces trois nombres pour construire des sommes de Riemann égales à 1, 0 ou $1/\pi$.

(5) FAUX. En effet la fonction de Dirichlet donne un contre-exemple.

(6) FAUX. Nous en avons vu un exemple dans l'exercice 3.

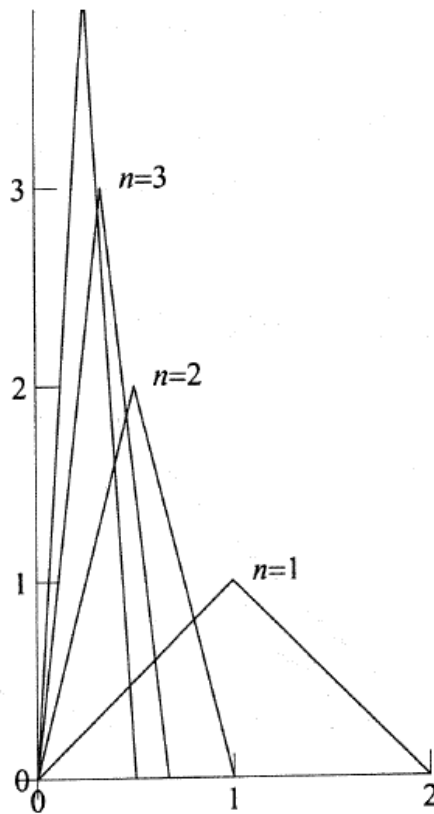
Exercice 6

Limite de fonctions.

(1) Soit f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par la formule

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Voici les graphes de ces fonctions pour $n = 1, 2, 3$ et 4 :



Ce sont des triangles isocèles dont la base devient de plus en plus étroite et la hauteur de plus en plus grande. Montrons que la suite de fonctions (f_n) tend vers la fonction nulle. Pour cela, appliquons la définition et calculons donc, pour tout $0 \leq x \leq 2$ la

limite de la suite $(f_n(x))$. Lorsque $x > 0$, il existe toujours un nombre entier N tel que $x > 2/N$. Ainsi pour $n \geq N$, on a par définition $f_n(x) = 0$. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

car la suite est constamment nulle dès que n est assez grand. Lorsque $x = 0$, $f_n(x) = 0$ pour tout n est la limite vaut aussi zéro.

- (2) Nous choisissons par exemple d'ordonner les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 selon leur dénominateur d'abord, puis leur numérateur. Concrètement, si a/b et a'/b' sont deux fractions irréductibles avec $0 < a < b$ et $0 < a' < b'$, on dit que la fraction a/b "vient avant" la fraction a'/b' si $b < b'$ ou si $b = b'$, mais que $a < a'$. Ainsi la fraction $2/3$ vient avant $1/4$ et la fraction $2/5$ vient avant $3/5$. On ordonne donc ces nombres rationnels de la manière suivante :

$$q_1 = 1/2, q_2 = 1/3, q_3 = 2/3, q_4 = 1/4, q_5 = 3/4, q_6 = 1/5, \\ q_6 = 2/5, q_7 = 3/5, q_8 = 4/5, q_9 = 1/6, \dots \quad \text{Que vaut } q_{10} ?$$

- (3) On définit la fonction $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ comme étant toujours nulle sauf $g_n(q_m) = 1$ pour $1 \leq m \leq n$. La fonction g_n est intégrable pour tout n puisqu'elle est continue par morceaux (ses seuls points de discontinuité sont les n premiers points q_m). L'intégrale est évidemment nulle par les propriétés des fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues que l'on a utilisées pour construire g_n sont les fonctions constamment nulles dont l'intégrale vaut zéro.

- (4) La limite $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ est la fonction de Dirichlet que nous avons déjà rencontrée. En effet, pour tout x irrationnel, c'est-à-dire $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, $g_n(x) = 0$ pour tout n si bien que

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0,$$

alors que pour tout x rationnel, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, il existe un entier N tel que $x = q_N$ si bien que $g_n(x) = 1$ dès que $n \geq N$.

Exercice 7

Intégrale d'une limite et limite des intégrales.

- (1) La suite (f_n) de l'exercice précédent a les propriétés suivantes. Elle tend vers la fonction nulle, mais chacune d'entre elles a une intégrale égale à 1 (c'est l'aire d'un triangle de base $2/n$ et de hauteur n). Ainsi

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx \neq \int_0^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^2 0 \cdot dx = 0$$

- (2) La suite (g_n) de l'exercice précédent est une suite de fonctions intégrables dont la limite est la fonction de Dirichlet, qui n'est pas intégrable.

Exercice 8

Intégration par parties. Soient $a < b$. On veut calculer l'expression $I(m, n) = \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(a-x)^n}{n!} dx$ pour tous les entiers naturels m, n .

- (1) Calculons directement la primitive $I(0, n)$ pour tout $n \geq 0$:

$$I(0, n) = \int_a^b \frac{(a-x)^n}{n!} = -\frac{(a-x)^{n+1}}{n!(n+1)} \Big|_a^b = -\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (2) Nous avons montré sous (1) que la formule est vraie pour $m = 0$ et $\forall n \geq 0$.

Pour faire la récurrence sur m , supposons par hypothèse de récurrence que

$$I(k, n) = (-1)^n \frac{(b-a)^{k+n+1}}{(k+n+1)!} \quad \text{pour tout } k < m \text{ et pour tout } n \geq 0$$

et montrons que la formule est vraie pour $I(m, n)$.

On calcule par parties en posant $f(x) = \frac{(b-x)^m}{m!}$ et $g'(x) = \frac{(a-x)^n}{n!}$.

Alors $f'(x) = -\frac{m(b-x)^{m-1}}{m!} = -\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}$ et $g(x) = -\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ si bien que

$$I(m, n) = -\frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} dx = -\int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} dx$$

puisque la première expression s'annule toujours ($m, n+1 \geq 1$).

Or l'expression restante est simplement

$$-I(m-1, n+1) = -(-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{m-1+n+1+1}}{(m-1+n+1+1)!} = (-1)^n \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$$

ce qui termine la démonstration.

- (3) En particulier, lorsque $a = -1$ et $b = 1$, et $m = n$, on a

$(b-x)^m(a-x)^n = [(1-x)(-1-x)]^m = (x^2-1)^m = (-1)^m(1-x^2)^m$ et on applique la formule pour trouver

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^m dx = (-1)^m (m!)^2 \int_{-1}^1 \frac{(x^2-1)^m}{(m!)^2} dx = (-1)^m \cdot (-1)^m (m!)^2 \frac{2^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{2^{2m+1} (m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Il y a m termes dans $m!$ et on distribue $2m$ des $2m+1$ nombres égaux à 2 pour doubler tous les termes :

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{(2m+1)!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}$$

Le résultat est le double du quotient du produit de tous les nombres pairs $\leq 2m+1$ par le produit de tous les impairs $\leq 2m+1$. Jolie formule!

Exercice 9

Calcule l'aire du domaine plan borné par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Les deux fonctions s'intersectent en $x = 0$ et $x = 1$. Entre 0 et 1, $\sqrt{x} > x\sqrt{x}$. Donc

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

Exercice 10

Calcule la longueur de $\varphi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ entre 0 et π .

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = \int_0^\pi \sqrt{4 \sin^2(t/2)} dt \\ &= \int_0^\pi 2 \sin(t/2) dt = 4 \cos(t/2) \Big|_0^\pi \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercice 11

Calcule la longueur de $f(t) = \cosh(t)$ entre 0 et 2π .

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cosh(x) dx = \sinh(x) \Big|_0^{2\pi} \\ &\simeq \sinh(2\pi) - \sinh(0) = 267.7449 - 0. \end{aligned}$$

Exercice 12

$$(1) \int \tan^2(t) dt = \int (1 + \tan^2(t)) dt - \int dt = -x + \tan(x) + C$$

(2) Par intégration par parties

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

(3) Pour tout entier n ,
$$\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt \leq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{t/n} dt \leq e^{2/n} \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{t/n} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt = 2 \int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{1}{t+2} dt = 4 - \ln(2),$$

on obtient par le théorème des deux gendarmes que l'intégrale cherchée est aussi égale à $4 - \ln(2)$.

Exercice 13

(1)
$$\int_1^4 \frac{1+x^3}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} + x^{\frac{5}{2}} dx = \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \right]_1^4 = 4 + \frac{2^8}{7} - 2 - \frac{2}{7} = \frac{268}{7}$$

(2) On pose $t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx \quad t=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{et} \quad x=\sqrt{\ln 5} \Leftrightarrow t=\ln 5$

d'où
$$\int_0^{\sqrt{\ln(5)}} \frac{10 t^3}{e^{t^2}} dt = \int_0^{\ln(5)} \frac{5x}{e^x} dx = \int_0^{\ln(5)} 5x \cdot e^{-x} dx$$

On intègre alors par parties : $u = 5x \Rightarrow u' = 5 \quad v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(5)} 5x \cdot e^{-x} dx &= [-5x e^{-x}]_0^{\ln(5)} + \int_0^{\ln(5)} 5e^{-x} dx = [-5x e^{-x} - 5e^{-x}]_0^{\ln(5)} \\ &= \left[\frac{-5(x+1)}{e^x} \right]_0^{\ln(5)} = -(\ln 5 + 1) + 5 = 4 - \ln 5. \end{aligned}$$