Corrigé 1

Exercice 1

Une fonction intégrable. On considère la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0,1]$.

(1) $f(x) = x^2$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ fermé et borné, donc elle est intégrable.

(2) Nous avons vu qu'il suffit de considérer les sommes de Darboux définies sur une subdivision régulière σ_n. Calculons la somme de Darboux supérieure sur σ_n. Puisque f est croissante sur $[0,1]$, le supremum sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est atteint en x_{i+1} si bien que

$$S_n(x^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(x_{i+1})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{i}{n})^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

La limite de cette expression lorsque n tend vers l'infini vaut $1/3$. Le calcul de la somme de Darboux inférieure est identique si bien que f est intégrable sur $[0,1]$.

(3) Soit σ une subdivision de $[0,1]$ de pas inférieur à ε. Soit $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et soit

$$R = \Sigma_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(y_i)^2$$

la somme de Riemann associée à ces choix. Calculons la différence de R et de la somme de Darboux supérieure

$$S_\sigma(x^2) - R = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1})^2 - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)y_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1}^2 - y_i^2)$$

Or, la différence $x_{i+1}^2 - y_i^2 = (x_{i+1} - y_i)(x_{i+1} + y_i) \leq 2(x_{i+1} - y_i) \leq 2\varepsilon$. Ainsi la différence $S_\sigma(x^2) - R$ est plus petite que 2ε. Elle est donc arbitrairement petite (en fait pour faire plus propre on aurait dû ré-écrire la preuve en remplaçant ε par la moitié : ceci montre que pour tout ε on peut choisir un pas de subdivision assez petit en sorte que la différence de toute somme de Riemann et de la somme de Darboux supérieure est inférieure à ε).

La limite des sommes de Riemann tend donc vers la limite des sommes de Darboux supérieures, qui existe.

(4) Une primitive de x^2 est donnée par le tiers de x^3. Par conséquent le Théorème fondamental du calcul intégral nous apprend que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3$.

Exercice 2

Compléments au cours.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Comme dans le cours nous utiliserons le fait que sur tout sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a, b]$ la différence entre la borne supérieure F_i et la borne inférieure f_i de f est égale à

$$\sup\{|f(x) - f(y)| \mid x.y \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

c'est-à-dire la plus grande différence entre deux valeurs de f sur cet intervalle (sa borne supérieure pour être précis).

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et σ une subdivision de $[a, b]$. On considère la fonction $\lambda \cdot f$. Appelons H_i la borne supérieure de λf et h_i la borne inférieure sur $[x_i, x_{i+1}]$. Comme

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|$$

On voit que

$$H_i - h_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} |\lambda f(x) - \lambda f(y)| = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| = |\lambda| \cdot (F_i - f_i)$$

Ainsi la différence entre les sommes de Darboux supérieures et inférieures vaut

$$S_\sigma(\lambda f) - s_\sigma(\lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(H_i - h_i) = |\lambda| \cdot (S_\sigma(f) - s_\sigma(f))$$

Puisque f est intégrable, la différence des sommes de Darboux supérieure et inférieure tend vers 0 lorsque le pas tend vers 0. C'est encore le cas lorsqu'on multiplie par λ, si bien que λf est intégrable.

(2) On répète le même argument en remplaçant l'égalité $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|$ par l'inégalité

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{g(x)g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{c^2}$$

Exercice 3

Une fonction intégrable non continue. On définit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ on pose $f(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $f(0) = 1$.

(1) Il s'agit d'une fonction "en escaliers" qui vaut 1 entre 1/2 et 1, 1/2 entre 1/4 et 1/2, etc. Les points de discontinuité sont tous les $\dfrac{1}{2^n}$ avec $n \geq 1$ et encore le point 0. En effet $f(1/2^n) = 1/2^n$, mais $\lim_{x \to 1/2^n_+} f(x) = 1/2^{n-1}$. De même $f(0) = 1$, mais $\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$.

(2) Cette fonction n'est pas continue par morceaux car dans la définition de continuité par morceaux on demande qu'il y ait un nombre fini de points de discontinuité. Par contre, si $\varepsilon > 0$, la fonction f est continue par morceaux sur $[\varepsilon, 1]$ puisque dans ce cas cette condition de finitude est satisfaite : seuls un nombre fini de $1/2^n$ sont plus grand que ε.

(3) L'aire déterminée par le graphe de f est égal à la somme infinie

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}}$$

C'est donc la limite des $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k-1}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1$. Il s'agit d'une suite croissante et bornée : elle converge (vers $\frac{2}{3}$). La fonction f est donc intégrable sur $[0, 1]$.

(4) La fonction f est une fonction strictement positive (car nous avons pris garde de définir $f(0) = 1$, mais elle prend des valeurs arbitrairement petites. La fonction $1/f$ n'est pas intégrable car l'aire de la surface déterminée par son graphe se calcule de manière analogue comme somme infinie

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

qui diverge.

Exercice 4

Changement de variables. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La *substitution* $z = g(x)$ donne la formule du changement de variables :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

(1) Lorsque $z = x^2$, une simple dérivation donne "$dz = 2xdx$". D'autre part si $x = 0$, $z = 0$ et si $x = 3/2$, $z = 9/4$. Ainsi on calcule

$$\int_0^{3/2} \frac{4x}{1 + x^2} dx = \int_0^{9/4} \frac{2}{1 + z} dz = 2\log(1 + z)\Big|_0^{13/4} = 2\log(13/4)$$

(2) Comme la dérivée de $1 + x^2$ est $2x$, une primitive de $f(x) = \dfrac{4x}{1 + x^2}$ est donnée par $2\log(1 + x^2)$. Ainsi

$$\int_0^{3/2} \frac{4x}{1 + x^2} dx = 2\log(1 + x^2)\Big|_0^{3/2} = 2\log(13/4)$$

(3) L'aire d'un rectangle de base $[a, a+\varepsilon]$ et de hauteur $f(b) = \dfrac{4b}{1+b^2}$ vaut bien sûr $A = \dfrac{4b\varepsilon}{1+b^2}$.

(4) La substitution $z = x^2$ envoie a sur a^2, $a+\varepsilon$ sur $(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2$ et b sur b^2.

(5) L'aire du rectangle de base $[a^2, a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2]$ et de hauteur $\dfrac{2}{1+b^2}$ vaut alors $A' = \dfrac{2(2a\varepsilon + \varepsilon^2)}{1+b^2}$. Ce rectangle est l'image du rectangle précédent via le changement de variables $z = x^2$.

(6) Calculons le quotient

$$\frac{A}{A'} = \frac{4b\varepsilon(1+b^2)}{2(2a\varepsilon+\varepsilon^2)(1+b^2)} = \frac{4b}{4a+2\varepsilon}$$

Lorsque $b = a + \varepsilon/2$, ce quotient est égal à 1. Ainsi l'aire $A' = A$.

(7) Par conséquent les sommes de Riemann permettant de calculer $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx$ et celles permettant de calculer $\displaystyle\int_0^{9/4} \frac{2}{1+z}dz$ convergent vers la même valeur. En effet on calcule une limite de sommes d'aires de rectangles, qui sont égales pour un choix adéquat de points y_i (le point b ci-dessus). Ceci est illustré ici :

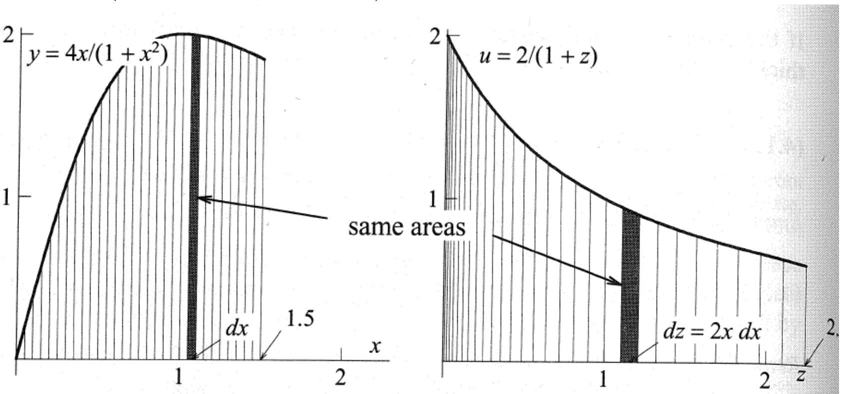


FIGURE 4.5. Substitution of a variable in an integral

$$\int_0^{1.5} \frac{2}{1+x^2} \cdot 2x\,dx = \int_0^{2.25} \frac{2}{1+z}\,dz = 2 \cdot \ln(1+z)\Big|_0^{2.25}$$
$$= 2 \cdot \ln(1+x^2)\Big|_0^{1.5} = 2\ln(3.25).$$

Fig. 4.5 illustrates the transformation $z = x^2$ and the functions $4x/(1+x^2)$ and $2/(1+z)$. Points x and $x + \Delta x$ are mapped to $z = x^2$ and $z + \Delta z = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$. Therefore, the shaded rectangles have, for $\Delta x \to 0$, the same areas, and both integrals in (4.14) give the same value.

Exercice 5

Vrai/Faux ?

(1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Alors $1/f$ est toujours intégrable. En effet cette fonction *continue* atteint son minimum m sur l'intervalle fermé $[a, b]$, si bien que le critère d'intégrabilité de la fonction $1/f$ s'applique.

(2) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et strictement positive. Alors $1/f$ n'est pas toujours intégrable. Le problème est que f peut prendre des valeurs arbitrairement petites si elle n'est pas continue. Nous avons vu un contre-exemple dans l'exercice 3.

(3) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et strictement positive. Alors f n'est pas toujours intégrable. Une adaptation de la fonction de Dirichlet permet facilement de construire un contre-exemple. Posons par exemple $f(x) = 1$ lorsque x est rationnel et $f(x) = 10$ lorsque x ne l'est pas. La limite des sommes de Darboux supérieures vaut alors $10(b - a)$ et celle des sommes de Darboux inférieures $(b - a)$.

(4) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle la limite S des sommes de Darboux supérieures vaut 1 et la limite s des sommes de Darboux inférieures vaut 0. Alors la limite de toute sommes de Riemann pour un choix de subdivisions dont le pas tend vers zéro peut valoir n'importe quoi entre 0 et 1. Choisissons un nombre quelconque entre 0 et 1, disons $1/\pi$ et construisons f de la manière suivante. On pose $f(x) = 1$ lorsque x n'est pas rationnel et si $x = p/q$ avec p et q premiers entre eux (la fraction est irréductible), alors on pose $f(x) = 0$ lorsque q est une puissance de 2 et $f(x) = 1/\pi$ sinon.

On affirme que dans tout sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de $[0, 1]$ se trouve un nombre irrationnel (ce qui est évident), un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de 2 (puisque $1/2^n$ devient arbitrairement petit lorsque n devient grand) et un nombre rationnel dont le dénominateur ne l'est pas. Il suffit de choisir l'un de ces trois nombres pour construire des sommes de Riemann égales à 1, 0 ou $1/\pi$.

(5) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et σ_n la subdivision régulière d'ordre n. Si la limite des sommes de Riemann pour le choix $y_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ existe, alors f n'est pas toujours intégrable. En effet la fonction de Dirichlet donne un contre-exemple.

(6) Toute fonction intégrable n'est pas forcément continue par morceaux. Nous en avons vu un exemple dans l'exercice 3.

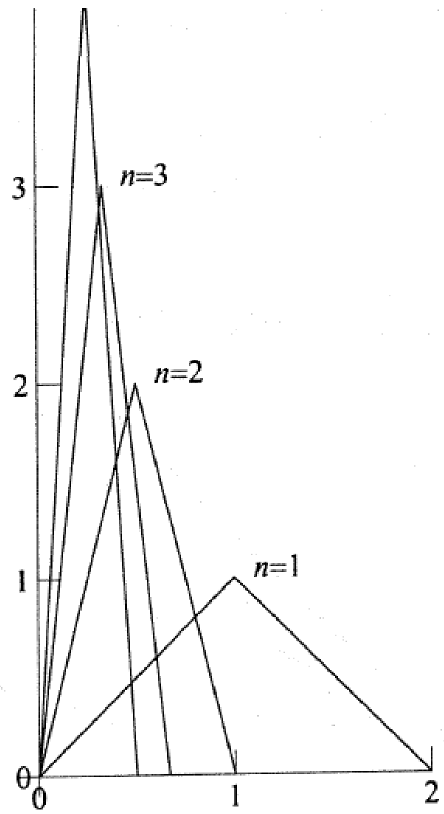
Exercice 6

Limite de fonctions.

(1) Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par la formule

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2x & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Voici les graphe de ces fonctions pour $n = 1, 2, 3$ et 4 :



Ce sont des triangles isocèles dont la base devient de plus en plus étroite et la hauteur de plus en plus grande. Montrons que la suite de fonctions (f_n) tend vers la fonction nulle. Pour cela, appliquons la définition et calculons donc, pour tout $0 \leq x \leq 2$ la limite de la suite $(f_n(x))$. Lorsque $x > 0$, il existe toujours un nombre entier N tel que $x > 2/N$. Ainsi pour $n \geq N$, on a par définition $f_n(x) = 0$. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

car la suite est constamment nulle dès que n est assez grand. Lorsque $x = 0$, $f_n(x) = 0$ pour tout n est la limite vaut aussi zéro.

(2) Nous choisissons par exemple d'ordonner les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 selon leur dénominateur d'abord, puis leur numérateur. Concrètement,

si a/b et a'/b' sont deux fractions irréductibles avec $0 < a < b$ et $0 < a' < b'$, on dit que la fraction a/b "vient avant" la fraction a'/b' si $b < b'$ ou si $b = b'$, mais que $a < a'$. Ainsi la fraction $2/3$ vient avant $1/4$ et la fraction $2/5$ vient avant $3/5$. On ordonne donc ces nombres rationnels de la manière suivante :

$q_1 = 1/2,\ q_2 = 1/3,\ q_3 = 2/3,\ q_4 = 1/4,\ q_5 = 3/4,\ q_6 = 1/5,$

$q_6 = 2/5,\ q_7 = 3/5,\ q_8 = 4/5,\ q_9 = 1/6,\ \ldots$ Que vaut q_{10} ?

(3) On définit la fonction $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme étant toujours nulle sauf $g_n(q_m) = 1$ pour $1 \leq m \leq n$. La fonction g_n est intégrable pour tout n puisqu'elle est continue par morceaux (ses seuls points de discontinuité sont les n premiers points q_m. L'intégrale est évidemment nulle par les propriétés des fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues que l'on a utilisées pour construire g_n sont les fonctions constamment nulles dont l'intégrale vaut zéro.

(4) La limite $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ est la fonction de Dirichlet que nous avons déjà rencontrée. En effet, pour tout x irrationnel, c'est-à-dire $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1]$, $g_n(x) = 0$ pour tout n si bien que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0,$$

alors que pour tout x rationnel, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, il existe un entier N tel que $x = q_N$ si bien que $g_n(x) = 1$ dès que $n \geq N$.

Exercice 7

Intégrale d'une limite et limite des intégrales.

(1) La suite (f_n) de l'exercice précédent a les propriétés suivantes. Elle tend vers la fonction nulle, mais chacune d'entre elles a une intégrale égale à 1 (c'est l'aire d'un triangle de base $2/n$ et de hauteur n). Ainsi

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx \neq \int_0^2 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^2 0 \cdot dx = 0$$

(2) La suite (g_n) de l'exercice précédent est une suite de fonctions intégrables dont la limite est la fonction de Dirichlet, qui n'est pas intégrable.

Exercice 8

Intégration par parties. Soient $a < b$. On veut calculer l'expression $I(m,n) = \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!}\frac{(a-x)^n}{n!}dx$ pour tous les entiers naturels m, n.

(1) Calculons directement la primitive $I(0,n)$ pour tout $n \geq 0$:

$$I(0,n) = \int_a^b \frac{(a-x)^n}{n!} = -\frac{(a-x)^{n+1}}{n!(n+1)}\Bigg|_a^b = -\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(2) Nous avons montré sous (1) que la formule est vraie pour $m = 0$ et $\forall n \geq 0$.

Pour faire la récurrence sur m, supposons par hypothèse de récurrence que

$$I(k,n) = (-1)^n\,\frac{(b-a)^{k+n+1}}{(k+n+1)!} \quad \text{pour tout } k < m \text{ et } \underline{\text{pour tout}}\ n \geq 0$$

et montrons que la formule est vraie pour $I(m,n)$.

On calcule par parties en posant $f(x) = \frac{(b-x)^m}{m!}$ et $g'(x) = \frac{(a-x)^n}{n!}$.

Alors $f'(x) = -\frac{m(b-x)^{m-1}}{m!} = -\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}$ et $g(x) = -\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ si bien que

$$I(m,n) = -\frac{(b-x)^m}{m!}\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}dx = -\int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}dx$$

puisque la première expression s'annule toujours $(m, n+1 \geq 1)$.

Or l'expression restante est simplement

$$-I(m-1,n+1) = -(-1)^{n+1}\,\frac{(b-a)^{m-1+n+1+1}}{(m-1+n+1+1)!} = (-1)^n\,\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$$

ce qui termine la démonstration.

(3) En particulier, lorsque $a = -1$ et $b = 1$, et $m = n$, on a $(b-x)^m(a-x)^n = [(1-x)(-1-x)]^m = (x^2-1)^m = (-1)^m(1-x^2)^m$ et on applique la formule pour trouver

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^m dx = (-1)^m\,(m!)^2 \int_{-1}^1 \frac{(x^2-1)^m}{(m!)^2}dx = (-1)^m\cdot(-1)^m\,(m!)^2\frac{2^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Il y a m termes dans $m!$ et on distribue $2m$ des $2m+1$ nombres égaux à 2 pour doubler tous les termes :

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{(2m+1)!} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}$$

Le résultat est le double du quotient du produit de tous les nombres pairs $\leq 2m+1$ par le produit le tous les impairs $\leq 2m+1$. Jolie formule !

Exercice 9

Calcule l'aire du domaine plan borné par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Les deux fonctions s'intersectent en $x = 0$ et $x = 1$. Entre 0 et 1, $\sqrt{x} > x\sqrt{x}$. Donc

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

Exercice 10

Calcule la longueur de $\varphi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ entre 0 et π.

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^\pi \sqrt{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2} dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = \int_0^\pi \sqrt{4\sin^2(t/2)} dt \\
&= \int_0^\pi 2\sin(t/2) dt = 4\cos(t/2)|_0^\pi \\
&= 4
\end{aligned}$$

Exercice 11

Calcule la longueur de $f(t) = \cosh(t)$ entre 0 et 2π.

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cosh(x) dx = \sinh(x)|_0^{2\pi} \\
&\simeq \sinh(2\pi) - \sinh(0) = 267.7449 - 0.
\end{aligned}$$

Exercice 12

$$\int \tan^2(t) dt = \int (1 + \tan^2(t)) dt - \int dt = -x + \tan(x) + C$$

Exercice 13

Pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt \leq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{t/n}dt \leq e^{2/n}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{t/n}dt \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt \;=\; 2\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{1}{t+2}dt = 4-\ln(2).$$

Exercice 14

Par intégration par parties

$$\int xe^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Exercice 15

(1) $$\int_1^4 \frac{1+x^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} + x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}}\right]_1^4 \;=\; 4 + \frac{2^8}{7} - 2 - \frac{2}{7} \;=\; \frac{268}{7}$$

(2) On pose $t^2 = x \;\Rightarrow\; 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \quad t=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ et $x=\sqrt{\ln 5} \;\Leftrightarrow\; t = \ln 5$

d'où $$\int_0^{\sqrt{\ln(5)}} \frac{10\,t^3}{e^{t^2}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\ln(5)} \frac{5\,x}{e^x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\ln(5)} 5x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

On intègre alors par parties : $u = 5x \;\Rightarrow\; u' = 5 \qquad v' = e^{-x} \;\Rightarrow\; v = -e^{-x}$

$$\int_0^{\ln(5)} 5\,x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\left[-5x\,e^{-x}\right]_0^{\ln(5)} + \int_0^{\ln(5)} 5e^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\left[-5x\,e^{-x} - 5\,e^{-x}\right]_0^{\ln(5)} =$$

$$\left[\frac{-5(x+1)}{e^x}\right]_0^{\ln(5)} = -(\ln 5 + 1) + 5 = 4 - \ln 5.$$