Série 2

Volumes et surfaces de révolution

Exercice 1.
Calcule le volume de l'hyperboloïde de révolution d'équation

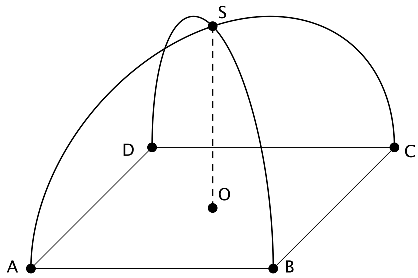
$$x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$$

pour $1 \geq z \geq -1$.

Exercice 2 (Différence de volumes)**.**
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions réelles continues et supposons que* $g(x) \geq f(x) \geq 0$ *pour tout* x. *On suppose encore que* $f(a) = g(a)$ *et* $f(b) = g(b)$. *On considère le corps de révolution* K *obtenu en faisant tourner autour de l'axe* Ox *les graphes de* f *et de* g.

(1) *Montre que le volume de ce corps de révolution est égal à la différence des volumes des corps de révolution* K_g *obtenu en faisant tourner le graphe de* g *autour de* Ox *et* K_f *obtenu en faisant tourner le graphe de* f *autour de* Ox.
(2) *Calcule le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de* Ox *la surface comprise entre les graphes de* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercice 3.
On considère une tente igloo de base carrée, soutenue par deux arceaux reliant les sommets opposés de la base. La diagonale de la base carrée $ABCD$ *vaut* $2r$. *Chacun des arceaux forme un arc de cercle centré en* O, *le milieu de la base de la tente. On considère que les arceaux se coupent au point* S *situé à l'aplomb de* O *et que la toile de la tente est parfaitement tendue.*



(1) Calcule en fonction de r le volume de la tente igloo en utilisant une intégrale appropriée.

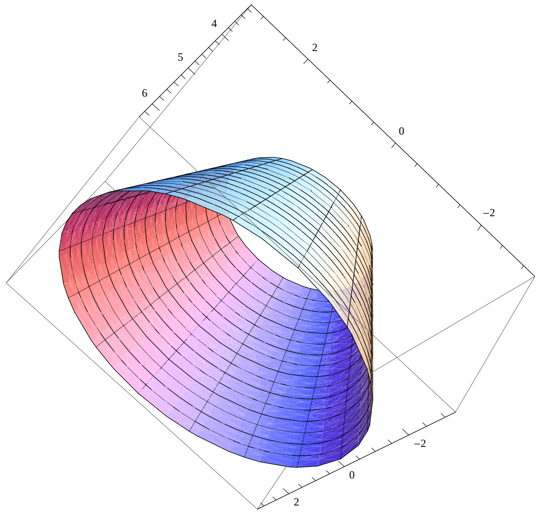
(2) Calcule en fonction de r le volume de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet S ainsi que le volume de la demi sphère de rayon OS. Observe le rapport entre les trois volumes obtenus.

Exercice 4 (Cône de révolution.)**.**

(1) Sans utiliser le calcul intégral, calcule l'aire du cône de révolution de hauteur h et de rayon r.

Indication : Calcule l'aire du secteur plan obtenu en développant la surface du cône.

(2) Déduis du point précédent l'aire d'un cône de révolution tronqué. On supposera que le rayon du cercle de base vaut R, celui du "couvercle" r et la hauteur h.



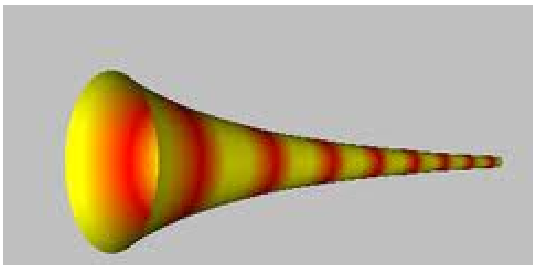
Exercice 5.

Calcule l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe *de la fonction $f(x) = 2 - x^2$ définie sur $[-1, 1]$. Calcule ensuite son volume.*

<u>*Indication :*</u> *Pour le calcul de l'aire, utiliser (sans démonstration) les formules suivantes :*

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+u^2}du &= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + C. \\
\int u^2\sqrt{1+u^2}du &= \frac{u}{4}\sqrt{(u^2+1)^3} - \frac{u}{8}\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{8}\ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + C
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Le paradoxe de la trompette de Gabriel)**.**
On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la fonction $\dfrac{1}{x+1}$ autour de l'axe Ox pour $0 \leq x < \infty$:



Calcule le volume et la surface de la trompette de Gabriel décrite ci-dessus.

Exercice 7 (Vrai ou faux ?)**.**
Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

(1) *L'aire du cylindre de rayon r et de hauteur $2r$ est plus grande que celle de la sphère de rayon r qu'il contient.*

(2) *Soient D et D' deux domaines de même aire se trouvant dans le plan Oxz. Alors les deux volumes de révolution obtenus en faisant tourner D et D' autour de Ox ont même volume.*

(3) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

est toujours positive (ou nulle).

Applications à la physique

Exercice 8 (Un peu de science-fiction...).

A l'<u>intérieur</u> de la Terre, considérée comme une boule homogène, la force de gravitation s'exerçant sur un point matériel est dirigée vers le centre de la Terre et est proportionnelle à la distance séparant ce point du centre de la Terre. Dans un livre de science-fiction, on veut creuser un puits jusqu'au centre de la Terre. Quel travail doit-on fournir pour transporter une masse d'un kilo du centre à la surface de la Terre si on considère que le rayon de la Terre est égal à $6.371 \cdot 10^6[m]$ *et l'accélération à la surface est égale à* $9.81[m/s^2]$ *?*

<u>Indication :</u> $\vec{F} = m\vec{a}$.

Exercice 9.

À partir du temps $t = 0$, *on verse de l'eau dans un récipient initialement vide avec un débit instantané* $d(t) = 2t$ *litres par minute.*

Simultanément, une partie de cette eau s'échappe avec un débit instantané $v(t) = t^2$ *litres par minute, par un trou situé au fond du récipient.*

(1) *Quel volume d'eau le récipient contient-il après 1 minute ?*
(2) *A quel moment le volume d'eau dans le récipient sera-t-il maximal ?*
(3) *A quel moment le récipient sera-t-il à nouveau vide ?*
(4) *Esquisse le graphe de la fonction* V *exprimant le volume d'eau contenu dans le récipient en fonction du temps* t *mesuré en minutes, pour* t *compris entre* 0 *et l'instant où le récipient est à nouveau vide.*

<u>Indication :</u> Le volume V *au temps* t *vaut*

$$V(t) = \int_0^t f(t)\ dt,$$

où $f(t)$ *dénote le débit net instantané, à savoir le débit entrant moins le débit sortant.*