Série 2

Problèmes obligatoires

Exercice 1

Cône de révolution. Calcule l'aire du cône de révolution de hauteur h et de rayon r de trois manières différentes.

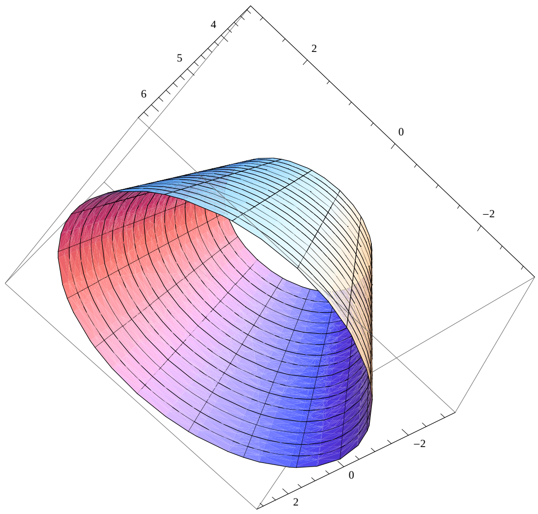
(1) Calcule l'aire du secteur plan obtenu en développant la surface du cône.

(2) Découpe la surface du cône en n secteurs égaux à approcher par des triangles isocèles de base $2\pi r/n$ et dont la hauteur est à déterminer.

(3) Utilise le calcul intégral et la formule vue au cours.

Exercice 2

Cône de révolution tronqué. Calcule l'aire d'un cône de révolution tronqué. On supposera que le rayon du cercle de base vaut R, celui du "couvercle" r et la hauteur h.



Tu peux déduire le résultat de l'exercice précédent, et ensuite faire le calcul par le biais d'une intégrale.

Exercice 3

Tonneau. Calcule l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = \sin x$ définie sur $[\pi/6, 5\pi/6]$. Calcule ensuite son volume.

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

(1) L'aire totale du domaine délimité par le graphe d'une fonction est toujours positive.

(2) L'aire du cylindre de rayon r et de hauteur $2r$ est plus grande que celle de la sphère de rayon r qu'il contient.

(3) Soient D et D' deux domaines de même aire se trouvant dans le plan Oxz. Alors les deux volumes de révolution obtenus en faisant tourner D et D' autour de Ox ont même volume.

(4) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

est toujours positive (ou nulle) puisqu'elle calcule une aire.

Exercice 5

Calcule le volume du cône de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon r.

Exercice 6

Calcule le volume de l'hyperboloïde de révolution d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$$

pour $1 \geq z \geq -1$.

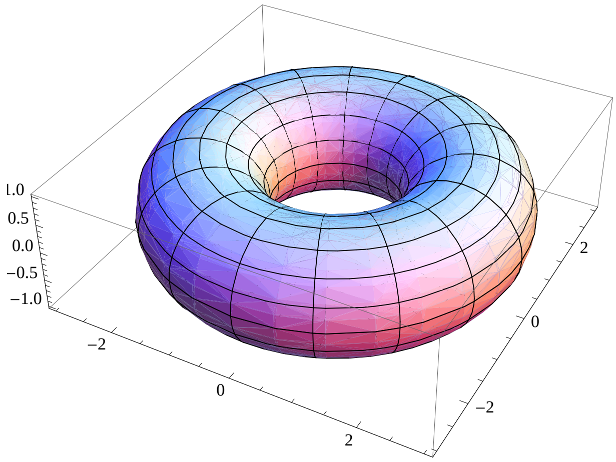
Exercices théoriques obligatoires

Exercice 7

Différence de volumes. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et supposons que $g(x) \geq f(x) \geq 0$ pour tout x. On suppose encore que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. On considère le corps de révolution K obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox les graphes de f et de g.

(1) Montre que le volume de ce corps de révolution est égal à la différence des volumes des corps de révolution K_g obtenu en faisant tourner le graphe de g autour de Ox et K_f obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de Ox.

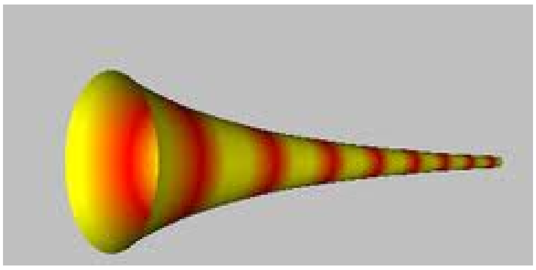
(2) Calcule le volume du tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox le disque de rayon 1 centré en $(0; 2)$.



(3) Calcule le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox la surface comprise entre les graphes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercice 8

Le paradoxe de la trompette de Gabriel. On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la fonction $\dfrac{1}{x+1}$ autour de l'axe Ox pour $0 \leq x < \infty$:



(1) Calcule le volume et la surface de la trompette de l'archange Gabriel décrite ci-dessus.

(2) Explique comment résoudre le paradoxe de la peinture de cet instrument.

Exercice 9

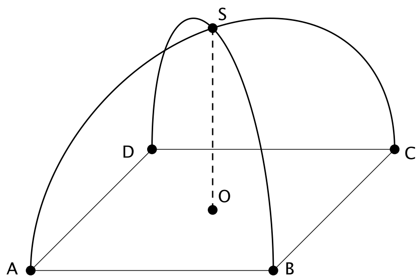
Calculer l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = 2 - x^2$ définie sur $[-1, 1]$. Calculer ensuite son volume.

Pour le calcul de l'aire, on utilise les formules suivantes sans démonstration :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+u^2}du &= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + C. \\ \int u^2\sqrt{1+u^2}du &= \frac{u}{4}\sqrt{(u^2+1)^3} - \frac{u}{8}\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) + C \end{aligned}$$

Exercice 10

On considère une tente igloo de base carrée, soutenue par deux arceaux reliant les sommets opposés de la base. La diagonale de la base carrée $ABCD$ vaut $2r$. Chacun des arceaux forme un arc de cercle centré en O, le milieu de la base de la tente. On considère que les arceaux se coupent au point S situé à l'aplomb de O et que la toile de la tente est parfaitement tendue.



(1) Calcule en fonction de r le volume de la tente igloo en utilisant une intégrale appropriée.

(2) Calcule en fonction de r le volume de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet S ainsi que le volume de la demi sphère de rayon OS. Observe le rapport entre les trois volumes obtenus.