II. Probabilités

Vous avez vu l'année passée le début de la combinatoire, avec les permutations, les arrangements et les combinaisons. Nous terminons aujourd'hui le sujet de combinatoire avec quelques formules de comptage et commençons le calcul des probabilités, intimement lié à la théorie des ensembles...

1 Les coefficients multinomiaux

Pour terminer le chapitre consacré à la combinatoire, nous généralisons la notion de coefficient binomial.

Définition 1.1. Soit $n_1, \ldots, n_r$ des nombres entiers et $n = n_1 + \cdots + n_r$.
Le *coefficient multinomial* est

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}. \qquad \left(= \overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_r) \right)$$

Lorsque $r = 2$, on voit que $\binom{n}{n_1, n_2}$ est simplement le coefficient binomial

$$C^n_{n_1} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2} = C^n_{n_2} \quad \text{puisque} \quad n_1 + n_2 = n \iff n_2 = n - n_1$$

Ce dernier compte le nombre de combinaisons possibles de n_1 objets choisis dans un ensemble de n objets. Ou encore le nombre de manières différentes de répartir n objets en deux groupes, l'un avec n_1 éléments, l'autre n_2 éléments.

Mais que compte-t-on en général avec des coefficients multinomiaux ?

Théorème 1.2. *Le nombre de répartitions possibles de n objets distinguables en r groupes de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ objets est égal au coefficient multinomial*

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}.$$

Anagramme de ANANAS
ANANAS $\qquad \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$

Démonstration. Procédons par récurrence. Lorsque $r = 2$, c'est la cas binomial connu.
Supposons que $r > 2$ et que le cas $r - 1$ est vrai.
Pour répartir n objets en r groupes de $n_1, \dots, n_r$ éléments, on choisit d'abord n_r éléments pour former le r^e groupe. Il y a $C^n_{n_r} = \binom{n}{n_r}$ possibilités.
Il reste $n - n_r$ éléments à répartir en $r-1$ groupes de $n_1, n_2, \dots n_{r-1}$ éléments.
Par hyp. de recurrence, il y a $\binom{n-n_r}{n_1, \dots n_{r-1}}$ possibilités.
Par le principe de multiplication, il y a en tout

$$\binom{n}{n_r} \cdot \binom{n-n_r}{n_1 \dots n_{r-1}} = \frac{n!}{n_r!\,\cancel{(n-n_r)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_r)!}}{n_1! \dots n_{r-1}!} = \binom{n}{n_1, \dots, n_r}$$ possibilités. □

Exemple 1.3. Dans un camp, 14 élèves doivent choisir l'une des activités suivantes : canoé, escalade et spéléologie. Sachant qu'il y a trois canoés de 2 places, dont une est occupée par le moniteur, 4 baudriers disponibles, et 5 lampes de poches, combien de répartitions y a-t-il ?

Il y a $\binom{14}{5,4,5} = \frac{14!}{5!\ 4!\ 5!} = 252'252$ possibilités.

Pour terminer, voici le *Théorème multinomial*, qui généralise celui du binôme de Newton. La preuve est élémentaire.

Théorème 1.4. *On a* $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(n_1,\dots,n_r)} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}.$$

2 Répartitions des boules dans des urnes

Voici une application des principes combinatoires que vous avez vus l'année passée.
Le problème est de répartir n boules identiques dans r urnes. distinctes.

Exemple 2.1. On cherche à répartir 8 boules noires dans 3 urnes. On peut par exemple en placer 3 dans la première urne, puis une dans la deuxième, et 4 dans la dernière.
Pour compter le nombre de répartitions possibles, imaginons que nous alignions les huit boules comme ceci :

$$\bullet\ \bullet\ \bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

$\circ\circ\circ\circ\circ||\circ\circ\circ$

Il faut former trois groupes. Si on veut au moins une boule par urne, il faut placer 2 séparateurs (barres) dans deux espaces différents entre les boules.

Ici, 2 barres pour 7 espaces $\Longrightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$ façons

$= 7 \cdot 6$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Le nombre de répartition de n boules identiques en r urnes distinctes est*

$$\binom{n-1}{r-1}$$

si chaque urne doit contenir au moins une boule et que $r \leq n$.

Et si l'on autorise des urnes vides ? Dans la résolution précédente, on pourra donc placer plusieurs barres verticales au même endroit, y compris avant la première boule ou après la dernière.

Théorème 2.3. *Le nombre de répartition de n boules identiques dans r urnes distinctes est*

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!} = \binom{n+r-1}{r-1} = \overline{P}_{n+r-1}(n\,;r-1)$$

si l'on peut laisser certaines urnes vides.

Démonstration. Cette fois, il s'agit simplement d'aligner n boules et $r-1$ séparateurs :

C'est une permutation de $n+r-1$ éléments avec répétitions de n d'entre eux et $r-1$ autres.

Il y a donc $\overline{P}_{n+r-1}(n\,;r-1) = \binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$ possibilités. □

Exemple 2.4. Monsieur et Madame Aubert ont fait quelques économies et pensent que le moment est venu d'investir 20000 francs en bourse. Ils peuvent placer un certain nombre de milliers de francs en actions suisses, en actions de la zone Euro, en action américaines, ou encore en obligations. Combien de stratégies se présentent ?

$$\binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3!} = 1771 \text{ possibilités.}$$

3 Les événements

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on connait à l'avance les issues possibles, bien que l'on ne sache pas laquelle sera finalement réalisée.

On appelle *ensemble fondamental* l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note S.

Les éléments de S et tout sous-ensemble de S sont des *événements*.

Exemple 3.1. Si on lance une pièce de monnaie, l'ensemble fondamental $S = \{P, F\}$, où P est l'abréviation de pile et F celle de face.

Si l'expérience consiste à lancer deux dés distincts, alors il y a $6 \cdot 6 = 36$ issues possibles et

$$S = \{(i; j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

Les issues $\{(3; 6)\}$ ou $\{(i; i) \,|\, 1 \leq i \leq 6\}$ sont des événements ; le second est l'événement "les deux dés indiquent le même résultat".

Dans ces deux exemples, l'ensemble fondamental est fini, mais il se peut aussi qu'il soit infini.

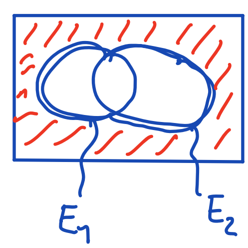
Dans le cas où l'expérience consiste à mesurer la durée de vie en heures d'une ampoule économique, on a $S = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Ici $E = [0; 24]$ est l'événement "l'ampoule dure moins d'un jour".

On utilisera les notations usuelles de la théorie des ensembles pour effectuer des opérations sur des événements. Ainsi, si E et F sont deux événements, l'événement E^c est le *complémentaire* de E, c'est-à-dire l'événement où l'issue est n'importe quel résultat qui ne se trouve pas dans E. L'*intersection* $E \cap F$, aussi notée EF, est l'événement où l'issue est à la fois dans E et dans F. Les lois de De Morgan sont des principes élémentaires, mais fort utiles !

Proposition 3.2. Lois de De Morgan

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements. Alors

$n = 2$



$$\boxed{\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\cap_{i=1}^n E_i\right)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c.}$$

Démonstration. Pour démontrer la première loi, nous allons voir que l'on a la "double inclusion" :

$$\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c \subset \cap_{i=1}^n E_i^c \quad \text{et} \quad \cap_{i=1}^n E_i^c \subset \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c.$$

Pour la première inclusion, considérons un élément $x \in \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c$.

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c \iff x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i \iff x \notin E_i, \forall i$$
$$\iff x \in E_i^c, \forall i$$
$$\iff x \in \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

La deuxième inclusion se fait en exercice dans la série 2.
Pour démontrer la seconde loi de Morgan, définissons $F_i = E_i^c$.

Par la 1ère loi de Morgan $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ car $(E_i^c)^c = E_i$

En prenant les complémentaires des deux expressions extrêmes :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

□

Remarque 3.3. Un peu d'histoire. Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

4 Les axiomes des probabilités

Vous avez certainement toutes et tous une idée intuitive de ce qu'est une probabilité.
Par exemple, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancé de dé équilibré vaut $\frac{1}{6}$.
Si on tire 13 cartes dans un jeu de 36 cartes, la probabilité qu'il y ait exactement trois rois dans le lot tiré vaut $\dfrac{C_3^4 \cdot C_{10}^{32}}{C_{13}^{36}}$

Lorsque l'ensemble fondamental S est fini et constitué d'issues équiprobables et dénombrables, la probabilité $P(A)$ d'un événement A se calcule avec la formule

$$P(A) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{|A|}{|S|}$$

Si les issues ne sont pas équiprobables ou que l'ensemble fondamental est infini ou de nature continue, cette formule ne suffit plus. Nous allons donc adopter une approche plus conceptuelle.

Andreï Kolmogorov (1903-1983), mathématicien russe, a posé les axiomes qui portent son nom et qui définissent formellement ce qu'est une probabilité. Les voici.

$\mathcal{P}(S)$ = l'ensemble des parties de S

Définition 4.1. Soit S l'ensemble fondamental d'une expérience.
Une *probabilité* est une application $P : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ telle que :

A1 1. $P(S) = 1$

A2 2. Si les événements $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sont disjoints, alors $P\left(\coprod_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

Le nombre réel $P(E)$ est appelé *probabilité* de l'événement E. réunion disjointes.

On attribue donc un nombre compris entre 0 et 1 à chaque événement. Plus ce nombre est grand, plus la probabilité de cet événement est grande. C'est pourquoi le premier axiome dit simplement que l'issue de l'expérience est à coup sûr (avec une probabilité égale à 1) l'un des éléments de S. Le deuxième axiome dit que la probabilité de l'union d'une infinité d'événements mutuellement exclusifs est la somme des probabilités de chacun d'eux.

Exemple 4.2. On lance un dé comme l'un de ceux que tu vois sur cette photo truquée :

Il se trouve que le coin commun aux faces 1, 2 et 3 est plombé si bien qu'on obtient deux fois plus souvent un grand nombre qu'un petit nombre.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

$P(4) = P(5) = P(6) = 2 \cdot P(1) = 2 \cdot P(2) = 2 \cdot P(3)$

D'autre part $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1\} \amalg \{2\} \amalg \ldots \amalg \{6\}$

$1 \overset{A1}{=} P(S) \overset{A2}{=} P(1) + P(2) + \ldots + P(6)$
$= 3 \cdot P(1) + 6\,P(1) = 9\,P(1) \Rightarrow P(1) = \frac{1}{9}$

$P(\{2; 4; 6\}) \overset{A2}{=} P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Déduisons à présent quelques propriétés élémentaires qui découlent des deux axiomes de la définition 4.1. La première de ces propriétés affirme que la probabilité de l'événement "vide" est nulle car il y a toujours une issue à toute expérience aléatoire.

Proposition 4.3. *On a* $P(\emptyset) = 0$.

Démonstration. Considérons les événements mutuellement exclusifs $E_1 = S$, $E_2 = \emptyset$, $E_3 = \emptyset$, etc. Alors nous savons que

$$1 \overset{A1}{=} P(S) \overset{A2}{=} \underbrace{P(S)}_{=1} + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$$

□

Ceci nous permet dans un premier temps de montrer que l'axiome (2) est vrai aussi si on traite le cas d'une union disjointe *finie* d'événements. Il suffit d'appliquer le deuxième axiome en ajoutant un nombre infini d'événements vides.

Théorème 4.4. *Soit* $E_1, \ldots, E_n$ *des événements. Alors* $P\left(\coprod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

Le théorème suivant nous dit que la probabilité qu'un événement n'arrive pas vaut 1 moins la probabilité que cet événement arrive.

Théorème 4.5. *Soit* E *un événement. Alors* $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Démonstration. $S = E \amalg E^c$

$$1 \overset{A1}{=} P(S) \overset{A2}{=} P(E) + P(E^c)$$

□

Si F est un événement contenu dans E, alors E est plus probable que F.

Théorème 4.6. *Soient* $F \subset E$ *deux événements. Alors* $P(F) \leq P(E)$.

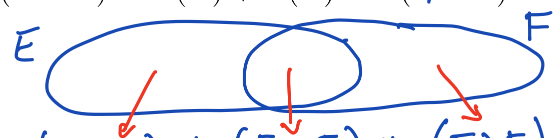
Démonstration.
Puisque F est contenu dans E, on peut exprimer E comme union disjointe de F et de $F^c \cap E$. Par conséquent, $P(E) = P(F) + P(F^c \cap E)$ ce qui montre le théorème. □

Voici peut-être la formule élémentaire la plus utile en pratique :

Théorème 4.7. *Soient E et F deux événements. Alors*

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Démonstration.



On peut écrire $E \cup F = (E \setminus F) \sqcup (E \cap F) \sqcup (F \setminus E)$

Par ailleurs $E = (E \setminus F) \sqcup (E \cap F)$ et $F = (F \setminus E) \sqcup (E \cap F)$

$$P(E \cup F) \overset{A2}{=} \underbrace{P(E \setminus F) + P(E \cap F)}_{P(E)} + \underbrace{P(F \setminus E) + P(E \cap F)}_{P(F)} - P(E \cap F)$$

$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

□

Exemple 4.8. On tire 13 cartes d'un jeu de 52.
Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 3 rois ou exactement 2 dames dans le lot.

$$P(3R \text{ ou } 2D) = P(3R) + P(2D) - P(3R \text{ et } 2D)$$

$$= \frac{C_3^4 \cdot C_{10}^{48}}{C_{13}^{52}} + \frac{C_2^4 \cdot C_{11}^{48}}{C_{13}^{52}} - \frac{C_3^4 \cdot C_2^4 \cdot C_8^{44}}{C_{13}^{52}} \cong 0{,}248 = 24{,}8\%$$

Exemple 4.9. Quelle est la probabilité que deux élèves d'un cours Euler aient leur anniversaire le même jour s'il y a 25 élèves dans la classe ?

Supposons qu'il y a 365 jours dans l'année et que les naissances sont réparties uniformément dans l'année.

$$\Rightarrow |S| = 365^{25} = \overline{A}_{25}^{365}$$

Nombre de répartitions des anniversaires sans répétition de date :

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots\ldots = A_{25}^{365}$$

$$\Rightarrow P(\text{aucun élève du même jour}) = \frac{A_{25}^{365}}{\overline{A}_{25}^{365}} \cong 0{,}4313 = 43{,}13\%$$

$$\Rightarrow P(\text{au moins un duo du même jour}) = 1 - 0{,}4313 = 56{,}87\%.$$