Définition 2.4. Soit X un ensemble de k éléments $x_1, \dots, x_k$. Une *permutation de n objets avec $r_1, r_2, \dots, r_k$ répétitions* de X est un n-uplet d'éléments de X où x_i apparaît exactement r_i fois.

En particulier, on a $r_1 + \cdots + r_k = n$. On peut aussi penser à ces permutations avec répétitions de la manière suivante. Soit X un ensemble de n éléments dans lequel il y a des sous-ensembles de $r_1, \dots, r_k$ objets identiques. Une permutation avec répétitions de X est une permutation de X où l'ordre des objets indistingables n'est pas pris en compte.

Théorème 2.5. *Le nombre de permutations de n avec $r_1, r_2, \dots r_k$ répétitions est* $\overline{P}_n(r_1; \dots; r_k) = \dfrac{n!}{r_1! \dots r_k!}$.

Démonstration. Ce résultat reviendra dans un prochain cours, où nous le démontrerons. □

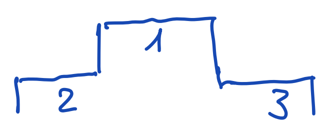
Exemple 2.6. On veut classer 6 livres de Jules Verne dans un rayon de librairie : 2 exemplaires de "20000 lieues sous les mers", 3 exemplaires de "5 semaines en ballon" et 1 seul du "Tour du monde en 80 jours". De combien de manières peut-on le faire ?

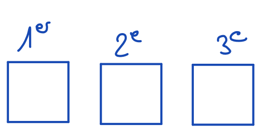
On a $\dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$ possibilités

3 Arrangements et combinaisons

Définition 3.1. Soit X un ensemble de n éléments distincts. Un *arrangement* de r éléments de X est une disposition ordonnée de r éléments de X. On note A^n_r le nombre de ces arrangements.

Exemple 3.2. Trente-deux équipes participent à la coupe du monde de football. Combien de podiums possibles y a-t-il ?





$32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$ podiums possibles

Le même raisonnement permet de calculer le nombre d'arrangements.

Proposition 3.3. $A^n_r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple 3.4. Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places. De combien de manières différentes peut-elle le faire ?

On doit choisir 3 places parmi les 5 du canapé $\Rightarrow A^5_3 = 60$ choix possibles

Définition 3.5. Soit X un ensemble de n éléments distincts et $r \leq n$. Un *arrangement avec répétitions* de r éléments de X est une disposition ordonnée de r éléments non nécessairement distincts de X. On note $\overline{A_r^n}$ le nombre de ces arrangements avec répétitions.

Proposition 3.6. $\overline{A_r^n} = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$.

Exemple 3.7. Combien de mots de trois lettres (de a à z) peut-on former ?

$$\underset{26}{\square} \cdot \underset{26}{\square} \cdot \underset{26}{\square} = 26^3 = 17576$$

Définition 3.8. Soit X un ensemble de n éléments distincts. Une *combinaison* de r éléments de X est une disposition non ordonnée de r éléments de X. On note C_r^n le nombre de ces combinaisons.

Exemple 3.9. Au SwissLotto, on tire 5 nombres entre 1 et 45. Combien de tirages différents y a-t-il ? Il y a A_5^{45} arrangements, mais puisqu'on ne tient pas compte de l'ordre des éléments (le tirage $5, 32, 40, 10, 3$ est le même que $40, 3, 32, 5, 10$), il faut encore diviser par $5!$. Il y a donc $\dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1221759$ tirages de lotto différents. Chaque joueur doit donc être bien conscient qu'il a moins d'une chance sur un million de gagner ! Cela fait moins de $0,0001\%$...

Théorème 3.10. $C_r^n = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

Exemple 3.11. Dans une classe de 10 élèves, combien a-t-on de choix de 3 personnes pour organiser une fête ?

On doit choisir 3 élèves parmi les 10 (ordre du choix pas important)

$\Rightarrow C_3^{10} = 120$ choix possibles

Le nombre de combinaisons C_r^n est aussi appelé *coefficient binomial* pour des raisons que nous allons voir tout de suite. La proposition suivante donne une relation entre les combinaisons de n éléments et celles de $n-1$ éléments.

Proposition 3.12. *On a* $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ *pour* $1 \leq r \leq n-1$.

Démonstration. Voici un argument combinatoire pour démontrer cette égalité. Soit X un ensemble de n objets et x l'un d'entre eux. Les combinaisons de r objets peuvent être classées en deux groupes, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas. Il y a $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ combinaisons qui contiennent x car il faut simplement former une combinaison de $r-1$ éléments de $X-\{x\}$ et $\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$ combinaisons qui ne contiennent pas x car il s'agit des combinaisons de r éléments de $X-\{x\}$. □

Exemple 3.13. Un relais radiophonique est mis en place à l'aide de n antennes, dont m sont défectueuses. Le relais ne fonctionne que si deux antennes défectueuses ne sont jamais côte à côte. Combien peut-on trouver de configurations qui fonctionnent ?

Imaginons les $n-m$ antennes qui fonctionnent, alignées comme ceci :

$$-F-F-F\ldots-F-F-$$

où F indique une antenne qui fonctionne et $-$ une place pour une éventuelle antenne défectueuse. Il y a donc $n-m+1$ positions où on peut installer une telle antenne. On doit en choisir m si bien que la réponse est $\begin{pmatrix} n-m+1 \\ m \end{pmatrix}$.

Le nombre de combinaisons C_k^n est aussi appelé *coefficient binomial* pour des raisons que nous allons voir maintenant. La notion de combinaison permet en effet d'établir une formule particulièrement utile :

Théorème 3.14 (Binôme de Newton)**.** *On a* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}$.

$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^0 \cdot y^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^1 \cdot y^{n-1} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^n y^0$

Démonstration. Considérons le produit

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_n+y_n).$$

Lorsque l'on développe cette expression, on obtient 2^n termes, chaque terme étant un produit de n facteurs (des x_i et des y_j). De plus, chacun de ces termes contient soit x_i, soit y_i pour tout $1 \leq i \leq n$. Il nous faut maintenant compter le nombre de termes qui contiennent exactement k facteurs x_i et $(n-k)$ facteurs y_j. Ces facteurs correspondent au choix de "k parmi n" (des combinaisons de k éléments dans un ensemble de n objets), c'est-à-dire $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. On obtient donc la formule en posant $x_i = x$ et $y_i = y$ pour tout i. □

Remarque 3.15. Un peu d'histoire. Isaac Newton (1643-1727) est un philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais.

Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Leibniz, du calcul infinitésimal. Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$\vdots$$
$$(x+y)^4 = 1\cdot x^4 + 4x^3\cdot y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

Prop. 3.12 $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

$$\binom{n}{r}$$