

Série 1

Exercice 1

Une fonction intégrable. On considère la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$.

- (1) Montre que cette fonction est intégrable en une ligne (pour des raisons théoriques).
- (2) Montre que f est intégrable à l'aide de la définition (avec les sommes de Darboux).
- (3) Montre que f est intégrable à l'aide de la caractérisation des sommes de Riemann (idée : montre que, pour une subdivision assez fine, la différence d'une somme de Riemann et de la somme de Darboux supérieure est arbitrairement petite).
- (4) Calcule la valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 x^2 dx$.

Exercice 2

Compléments au cours.

- (1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montre que la fonction $\lambda \cdot f$ est intégrable sur $[a, b]$.
- (2) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $c > 0$ tel que $g(x) \geq c$ pour tout $a \leq x \leq b$. Montre que la fonction $1/g$ est intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 3

Une fonction intégrable non continue. On définit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ on pose $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $f(0) = 1$.

- (1) Esquisse le graphe de cette fonction et détermine les points de discontinuité.
- (2) Cette fonction est-elle continue par morceaux ? Si $\varepsilon > 0$, la fonction f est-elle continue par morceaux sur $[\varepsilon, 1]$?
- (3) Montre que f est intégrable en calculant l'aire déterminée par le graphe de f comme une limite.
- (4) Montre que f est une fonction strictement positive, mais que $1/f$ n'est pas intégrable.

Exercice 4

Changement de variables. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La *substitution* $z = g(x)$ donne la formule du changement de variables :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Le but de cet exercice est de revoir cette formule et d'en donner une explication géométrique.

- (1) Calcule $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2} dx$ à l'aide du changement de variables $z = x^2$.
- (2) Calcule $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2} dx$ directement en trouvant une primitive de $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.
- (3) Calcule l'aire A d'un rectangle de base $[a, a+\varepsilon]$ et de hauteur $f(b)$ pour $a \leq b \leq a+\varepsilon$.
- (4) Calcule les images de cette base et du point b par la substitution $z = x^2$.
- (5) Calcule l'aire A' du rectangle dont la base est l'image de la base $[a, a+\varepsilon]$ et la hauteur est $\frac{2}{1+b^2}$.
- (6) Montre qu'il existe un choix - astucieux - de b qui fait en sorte que $A = A'$.
- (7) Conclue que les sommes de Riemann permettant de calculer $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2} dx$ et celles permettant de calculer $\int_0^{9/4} \frac{2}{1+z} dz$ convergent vers la même valeur.

Exercice 5

Vrai/Faux ? Justifie ta réponse dans tous les cas, donne un contre-exemple explicite lorsque c'est possible.

- (1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Alors $1/f$ est intégrable.
- (2) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et strictement positive. Alors $1/f$ est intégrable.
- (3) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et strictement positive. Alors f est intégrable.
- (4) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle la limite S des sommes de Darboux supérieures vaut 1 et la limite s des sommes de Darboux inférieures vaut 0. Alors la limite de toute sommes de Riemann pour un choix de subdivisions dont le pas tend vers zéro vaut aussi 0 ou 1.
- (5) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et σ_n la subdivision régulière d'ordre n . Si la limite des sommes de Riemann pour le choix $y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ existe, alors f est intégrable.
- (6) Toute fonction intégrable est continue par morceaux.

Exercice 6

Limite de fonctions. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions réelles. On dit que (f_n) converge - ponctuellement - vers la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si pour tout $x \in [a, b]$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. En d'autres termes, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

- (1) Soit f_n la fonction définie sur $[0, 2]$ par la formule

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2x & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Esquisse le graphe de ces fonctions pour $n = 1, 2, 3$ et montre que (f_n) tend vers la fonction nulle.

- (2) Donne une façon explicite d'écrire les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 comme $q_1, q_2, q_3, \dots$.
- (3) On définit la fonction $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ comme étant toujours nulle sauf $g_n(q_m) = 1$ pour $1 \leq m \leq n$. Montre que g_n est intégrable pour tout n et calcule son intégrale. Ces fonctions sont-elles continues par morceaux ?
- (4) Calcule la limite $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Il s'agit de la fonction de Dirichlet que nous avons déjà rencontrée.

Exercice 7

Intégrale d'une limite et limite des intégrales. Le but de cet exercice est d'étudier la différence entre la limite des intégrales d'une suite de fonctions et l'intégrale de la limite de ces fonctions.

- (1) Utilise la suite (f_n) de l'exercice précédent pour illustrer le fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

- (2) Utilise la suite (g_n) de l'exercice précédent pour illustrer le fait que la limite de fonctions intégrables n'est pas toujours intégrable.

Remarque. Nous verrons dans les prochains modules d'analyse qu'en cas de convergence *uniforme* ce problème disparaîtra.

Exercice 8

Intégration par parties. Soient $a < b$. On veut calculer l'expression

$$I(m, n) = \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(a-x)^n}{n!} dx$$

pour tous les entiers naturels m, n .

(1) Montre que $I(0, n) = (-1)^n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $n \geq 0$.

(2) Montre par récurrence sur m que $I(m, n) = (-1)^n \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$, $\forall m, n \geq 0$. Lors de la rédaction, attention au fait que n n'est pas fixé.

(3) Montre en particulier que $\int_{-1}^1 (1-x^2)^m dx = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}$

Exercice 9

Calcule l'aire du domaine plan borné par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 10

Calcule la longueur de la courbe définie par $\varphi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, avec $t \in [0, \pi]$.

Exercice 11

Calcule la longueur de la courbe définie par $f(t) = \cosh(t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 12

Calcule

(1) $\int \tan^2(t) dt$

(2) $\int x e^{2x} dx$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{t/n} dt$

Exercice 13

Calculer les intégrales suivantes

(1) $\int_1^4 \frac{1+x^3}{\sqrt{x}} dx$

(2) $\int_0^{\sqrt{\ln(5)}} \frac{10t^3}{e^{t^2}} dt$

Indication : effectuer un changement de variable, puis intégrer par partie.