Série 1

Exercice 1 (Equivalence des intégrales de Darboux et de Riemann)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée. Montrer qu'elle est itégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est intégrable au sens de Darboux.*
Indication : Pour le sens $R \Rightarrow D$*, étant donnée une suite de subdivisions* $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *dont les pas tendent vers* 0*, choisir pour chaque* k *des points* $\gamma_i^k, \tilde{\gamma}_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ *tels que*

$$\inf_{x_{i-1}^k \leq x \leq x_i^k} f(x) \geq f(\gamma_i^k) - \frac{1}{k}$$
$$\sup_{x_{i-1}^k \leq x \leq x_i^k} f(x) \leq f(\tilde{\gamma}_i^k) + \frac{1}{k}.$$

Exercice 2.

(1) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Montre que la fonction* $\lambda \cdot f$ *est intégrable sur* $[a, b]$*.*

(2) *Soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $c > 0$ *tel que* $g(x) \geq c$ *pour tout* $a \leq x \leq b$*. Montre que la fonction* $1/g$ *est intégrable sur* $[a, b]$*.*

Exercice 3 (Une fonction intégrable non continue)**.**
On définit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *de la façon suivante. Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ *on pose* $f(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *et* $f(0) = 1$*.*

(1) *Esquisse le graphe de cette fonction et détermine les points de discontinuité.*

(2) *Cette fonction est-elle continue par morceaux? Si* $\varepsilon > 0$*, la fonction* f *est-elle continue par morceaux sur* $[\varepsilon, 1]$*?*

(3) *Montre que* f *est intégrable en calculant l'aire déterminée par le graphe de* f *comme une limite.*

(4) *Montre que* f *est une fonction strictement positive, mais que* $1/f$ *n'est pas intégrable.*

Exercice 4 (Changement de variables).

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La substitution $z = g(x)$ *donne la formule du changement de variables:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Le but de cet exercice est de revoir cette formule et d'en donner une explication géométrique.

(1) *Calcule* $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx$ *à l'aide du changement de variables* $z = x^2$.
(2) *Calcule* $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx$ *directement en trouvant une primitive de* $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.
(3) *Calcule l'aire A d'un rectangle de base $[a, a+\varepsilon]$ et de hauteur $f(b)$ pour $a \leq b \leq a+\varepsilon$.*
(4) *Calcule les images de cette base et du point b par la substitution $z = x^2$.*
(5) *Calcule l'aire A' du rectangle dont la base est l'image de la base $[a, a+\varepsilon]$ et la hauteur est* $\frac{2}{1+b^2}$.
(6) *Montre qu'il existe un choix - astucieux - de b qui fait en sorte que $A = A'$.*
(7) *Conclus que les sommes de Riemann permettant de calculer* $\int_0^{3/2} \frac{4x}{1+x^2}dx$ *et celles permettant de calculer* $\int_0^{9/4} \frac{2}{1+z}dz$ *convergent vers la même valeur.*

Exercice 5 (Vrai/Faux?).

Justifie ta réponse dans tous les cas, donne un contre-exemple explicite lorsque c'est possible.

(1) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Alors $1/f$ est intégrable.*
(2) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et strictement positive. Alors $1/f$ est intégrable.*
(3) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et strictement positive. Alors f est intégrable.*
(4) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle la limite S des sommes de Darboux supérieures vaut 1 et la limite s des sommes de Darboux inférieures vaut 0. Alors la limite de toute sommes de Riemann pour un choix de subdivisions dont le pas tend vers zéro vaut aussi 0 ou 1.*
(5) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et σ_n la subdivision régulière d'ordre n. Si la limite des sommes de Riemann pour le choix* $y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ *existe, alors f est intégrable.*
(6) *Toute fonction intégrable est continue par morceaux.*

Exercice 6 (Limite de fonctions).

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions réelles. On dit que (f_n) converge - ponctuellement

- vers la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in [a,b]$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. En d'autres termes, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

(1) *Soit f_n la fonction définie sur $[0,2]$ par la formule*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \textit{si} \quad 0 \le x \le 1/n \\ 2n - n^2 x & \textit{si} \quad 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & \textit{si} \quad 2/n \le x \le 2 \end{cases}$$

Esquisse le graphe de ces fonctions pour $n = 1, 2, 3$ et montre que (f_n) tend vers la fonction nulle.

(2) *Donne une façon explicite d'écrire les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 comme $q_1, q_2, q_3, \ldots$.*

(3) *On définit la fonction $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme étant toujours nulle sauf $g_n(q_m) = 1$ pour $1 \le m \le n$. Montre que g_n est intégrable pour tout n et calcule son intégrale. Ces fonctions sont-elles continues par morceaux?*

(4) *Calcule la limite $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Il s'agit de la fonction de Dirichlet que nous avons déjà rencontrée.*

Exercice 7 (Intégrale d'une limite et limite des intégrales)**.**
Le but de cet exercice est d'étudier la différence entre la limite des intégrales d'une suite de fonctions et l'intégrale de la limite de ces fonctions.

(1) *Utilise la suite (f_n) de l'exercice précédent pour illustrer le fait que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx$$

(2) *Utilise la suite (g_n) de l'exercice précédent pour illustrer le fait que la limite de fonctions intégrables n'est pas toujours intégrable.*

Remarque. Nous verrons dans les prochains modules d'analyse qu'en cas de convergence uniforme *ce problème disparaîtra.*

Exercice 8 (Intégration par parties)**.**
Soient $a < b$. On veut calculer l'expression

$$I(m,n) = \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(a-x)^n}{n!} dx$$

pour tous les entiers naturels m, n.

(1) *Montre que* $I(0,n) = (-1)^n \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ *pour tout* $n \geq 0$.

(2) *Montre par récurrence sur* m *que* $I(m,n) = (-1)^n \dfrac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$, $\forall m, n \geq 0$. *Lors de la rédaction, attention au fait que* n *n'est pas fixé.*

(3) *Montre en particulier que* $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m dx = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}$

Les exercices suivants sont des rappels du module d'intégration de troisième année.

Exercice 9. *Calcule l'aire du domaine plan borné par* $f(x) = x\sqrt{x}$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 10. *Calcule la longueur de la courbe définie par* $\varphi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, *avec* $t \in [0, \pi]$.

Exercice 11. *Calcule*

(1) $\displaystyle\int \tan^2(t) dt$

(2) $\displaystyle\int te^{2t} dt$

Exercice 12. *Calcule*

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{t/n} dt$

(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+t^3}{\sqrt{t}} \, dt$

(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln(5)}} \frac{10\, t^3}{e^{t^2}} \, dt.$

Indication *: effectuer un changement de variable, puis intégrer par partie.*