Cours Euler: Série 35

19 juin 2024

Exercice 1

Montre les critères suivants de similitude de triangles particuliers (en te basant sur les trois cas de similitude des triangles) :

1) Deux triangles rectangles sont semblables s'ils ont un angle aigu isométrique.

2) Deux triangles isocèles sont semblables s'ils ont leur angle au sommet isométrique ou l'angle à la base isométrique.

3) Tous les triangles équilatéraux sont semblables.

Exercice 2

Les hauteurs BR et CP du triangle ABC se coupent en Q.

Sébastien suppose que les triangles BQP et CQR sont semblables.

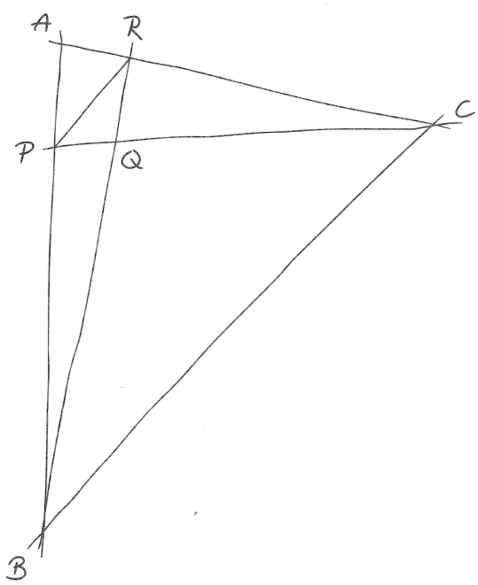
Nicolas pense qu'il s'agit des triangles APR et QPR.

Alexandre penche plutôt pour la similitude des triangles QPR et QBC.

Mathieu est certain que le triangle APR est semblable au triangle QBC.

Quant à Amélie, elle croit qu'il s'agit des triangles BRA et CPA.

Qui a raison ?



Exercice 3

Théorème des bissectrices. Soit un triangle ΔABC et P un point sur $[BC]$. Montre que la droite AP est la bissectrice de l'angle en A si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Indication. Trace la parallèle p à AC passant par B et considère le point D d'intersection de p avec la droite PA. Applique ensuite le Théorème de Thalès pour calculer le rapport $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\dots$

Exercice 4

Polygones réguliers. Un polygone inscrit dans un cercle dont les côtés sont isométriques est appelé *polygone régulier*. En reliant le centre du cercle aux sommets du polygone on fait apparaître des triangles isocèles.

1) Pourquoi ces triangles sont-ils isocèles ? Pourquoi sont-ils tous isométriques ? Quel est leur angle au centre ?

2) Comment s'appelle le polygone régulier à trois côtés ? Sais-tu calculer la longueur des côtés en fonction du rayon ? Conclus-en une approximation de π.

3) Comment s'appelle le polygone régulier à quatre côtés ? Sais-tu calculer la longueur des côtés en fonction du rayon ? Conclus-en une approximation de π.

4) Comment s'appelle le polygone régulier à six côtés ? Sais-tu calculer la longueur des côtés en fonction du rayon ? Conclus-en une approximation de π.

5) **Le décagone.** On considère un décagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r. Soit x la longueur d'un côté et $y = r - x$. Montre que $x^2 = ry$. Déduis-en que $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$. Conclus-en une approximation de π.

   Indication. Trace dans l'un des triangles isocèles ΔOAB de côtés r, x et r la bissectrice de l'angle en B. Elle coupe $[OA]$ en un point C. Montre que $\overline{OC} = \overline{AB}$ et applique le Théorème des bissectrices (voir ci-dessus) qui affirme que ce point C détermine des rapports égaux : $\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$.

6) **Le pentagone.** Soit $[AD]$ le côté d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r. Construisons un parallélogramme $ODAP$. Le côté $[AP]$ coupe le cercle en un point B. Montre que $[AB]$ est le côté d'un décagone régulier.

   Indication. Calcule l'angle au centre du triangle ΔOAB.

7) **Le pentagone : Théorème d'Eudoxe.** Mène une tangente au cercle par le point P. Elle touche le cercle en un point E. Montre que le triangle ΔOEP est un triangle rectangle dont les côtés sont ceux d'un pentagone, hexagone et décagone réguliers.

Exercice 5

Trois soucoupes d'un rayon de 50mm sont posées, à se toucher, sur une table. Quelle est l'aire de la région laissée libre entre elles ?

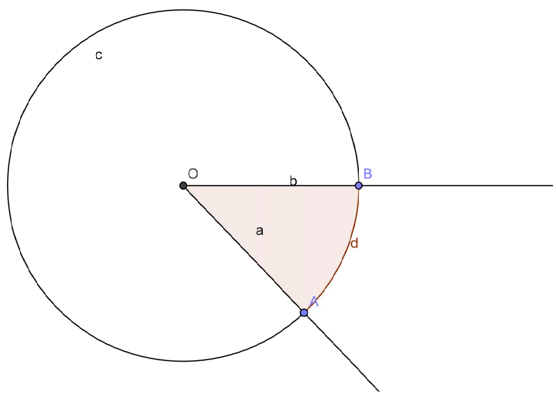
Indication. Fais un croquis de la situation et trace les segments qui relient les centres des trois soucoupes entre eux.

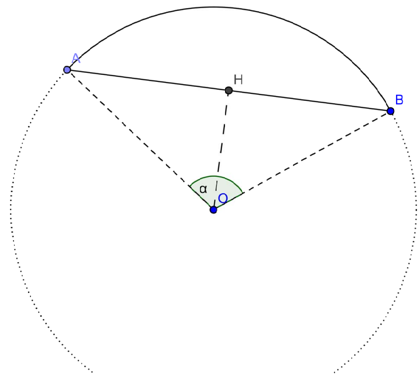
Exercice 6

Calculer l'aire de la région comprise entre un cercle et un carré inscrit dans ce cercle (en fonction du rayon du cercle).

Exercice 7

Secteur et segment circulaire. On voit sur les deux figures ci-dessous un secteur circulaire et un segment circulaire :

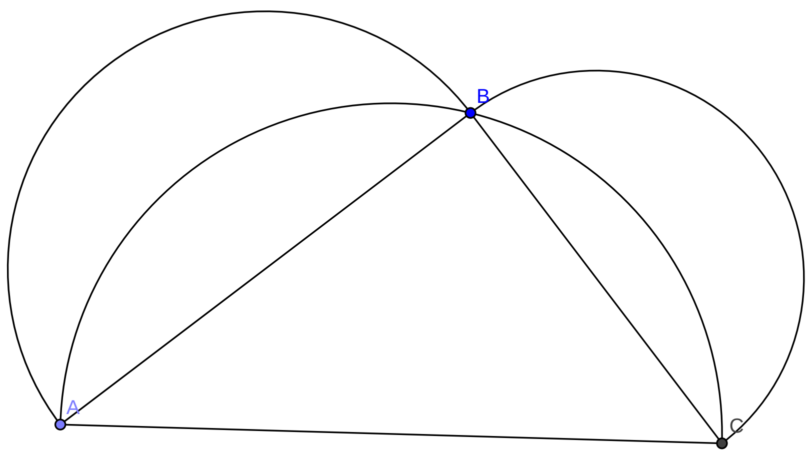




1) Un *secteur circulaire* est l'intersection d'un disque et d'un angle ayant son sommet au centre du disque. Calcule l'aire d'un secteur dont l'angle au centre vaut α (exprimé en radians). Quel est la longueur de l'arc AB ?
2) Un *segment circulaire* est l'intersection d'un disque et d'un demi-plan. Calcule l'aire d'un segment circulaire en fonction de l'angle au centre α (exprimé en radians) et de la longueur $h = \overline{OH}$.

Exercice 8

Théorème des lunules d'Hippocrate. On considère un triangle ΔABC rectangle et on trace les cercles de Thalès de chacun des trois côtés. Montre que la somme des aires des deux "lunules" (les régions des disques dont les diamètres sont les cathètes qui ne sont pas comprise dans le disque dont le diamètre est l'hypothénuse) est égale à l'aire du triangle.



Exercice 9

1) Convertis en *degrés* la mesure des angles suivants, donnés en radians :

i) $\frac{\pi}{6}$	**iii)** 4π
ii) $\frac{\pi}{10}$	**iv)** $0,28421$

2) Convertis en *radians* la mesure des angles suivants, donnés en degrés :

i) $45°$	**iii)** $-240°$
ii) $150°$	**iv)** $22,43°$

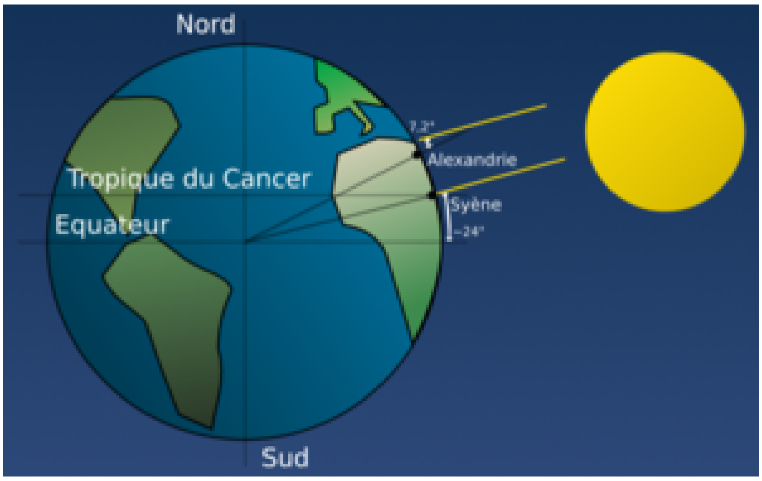
3) L'angle au sommet d'un triangle isocèle mesure 72°. Calcule la mesure exacte en radians des angles de ce triangle.

Exercice 10

Une roue de voiture a un diamètre de 75 cm. Si la voiture roule à une vitesse de 72 km/h, à quelle *vitesse angulaire* (en tours/minute) la roue tourne-t-elle sur son axe ?

Exercice 11

Le calcul d'Eratosthène. Eratosthène observa l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie, le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est à ce moment précis de l'année que dans l'hémisphère nord le Soleil détient la plus haute position au-dessus de l'horizon. Or, Eratosthène remarqua qu'il n'y avait aucune ombre dans un puit à Syène (ville située à peu près sur le tropique du Cancer) ; ainsi, à ce moment précis, le Soleil éclairait directement le fond du puits. ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre ; Eratosthène mesura que l'angle entre les rayons solaires et la verticale était de 7,2 degrés.



Eratosthène évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie en faisant appel à un bématiste qui se basa sur le temps en journées de marche de chameau entre les deux villes : la distance obtenue était de 5000 stades, soit 787,5 km, mesure très proche de la réalité, un stade (longueur utilisée dans les stades d'Olympie ou de Delphes) valant environ 157,5 m.

Utilise ces renseignements pour estimer la circonférence de la Terre en considérant que les rayons de soleil à Syène et Alexandrie sont parallèles (mais sans utiliser la valeur de π !). En utilisant π à présent, estime aussi le rayon de la Terre.

NB. De fait le périmètre méridional de la Terre vaut 40007,864 km, le rayon équatorial est de 6378,137 km et le rayon polaire de 6356,7523142 km.

Exercice 12

Trouve la vitesse moyenne de la Terre en km/s dans sa course autour du Soleil sachant que la distance moyenne Terre–Soleil est de 150'000'000 km et la durée de l'année solaire de 365,26 jours.

Exercice 13

Les roues d'une diligence ont un diamètre de 1m et comportent 16 rayons. On filme cette diligence pendant le tournage d'un western avec une caméra prenant 24 images par seconde. Au moment de la projection, les roues semblent avancer, reculer, ou rester immobiles. Sachant que la vitesse d'un cheval au galop n'excède guère 20km/h, quelle est la vitesse de la diligence si :

1) les roues semblent être immobiles ;

2) les roues semblent reculer ;

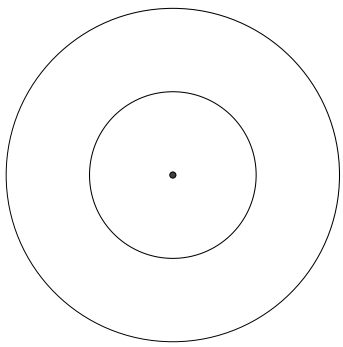
3) les roues semblent avoir 32 rayons.

Exercice 14

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

1) $2\pi = 0$.

2) L'aire d'une *couronne* de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 2 vaut 3π.



3) De la construction de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 on déduit que $\pi/3 > 1$.