Série 5

Pour le 18 septembre 2024

Exercice 1

Calcule l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

a) X est le nombre obtenu lors du jet d'un dé équilibré ;

b) X est le résultat du jet d'une pièce de monnaie équilibrée, on attribue la valeur 1 à pile et 0 à face ;

c) X est le nombre de piles obtenus lors du lancer de deux pièces équilibrées ;

d) X est le nombre de piles obtenus lors du lancer de trois pièces équilibrées.

Exercice 2

Un casino effectue une étude sur le nombre d'apparition du double zéro à la roulette. Le croupier note les résultats pendant 60 jours consécutifs :

nombre de 00 par jour	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
nombre de jours	1	3	6	9	14	11	7	6	2	1

Calcule l'espérance et la variance du nombre de 00 par jour sur la base de cette statistique.

Exercice 3

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement deux boules de l'urnes, sans remise. Soit X la variable aléatoire qui donne le plus grand numéro tiré et Y la variable aléatoire qui donne le plus petit numéro tiré. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 4

Un dé est jeté deux fois. Soit X la somme et Y la différence des résultats. Calcule la covariance de X et Y. Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses.

a) Si cette semaine les nombres 7, 23 et 45 sortent au lotto, il est moins probable qu'ils sortent aussi la semaine prochaine.

b) La probabilité que les nombres 7, 23 et 45 sortent au lotto cette semaine et la semaine prochaine est plus faible que la probabilité qu'ils ont de sortir cette semaine.

c) $E[X^n] = E[X]^n$.

d) $E[aX] = aE[X]$.

e) $\mathrm{Var}(aX) = a\mathrm{Var}(X)$.

f) $\mathrm{Var}(X^2) = \mathrm{Var}(X)^2$.

Exercice 6

La variable aléatoire X compte les gains du jeu suivant. Trois gobelets opaques sont posés à l'envers sur une table. L'un d'eux cache une pièce de deux francs, l'autre une araignée, le dernier est vide. Tu dois choisir l'un des gobelets et tu gagnes les 2 francs si tu les trouves, mais tu perds 2 francs si tu trouves l'araignée. Tu ne gagnes rien si tu choisis le verre vide. La variable aléatoire Y vaut 1 si $X = 0$, et zéro sinon.

a) Montre que X et Y sont des variables dépendantes.

b) Calcule $E[X]$, $E[Y]$ et $E[XY]$.

c) Montre que la covariance de X et Y est nulle bien que les variables soient dépendantes.

Exercice 7

Un étang contient 100 poissons parmi lesquels nagent 30 carpes. On en pêche 20 pour une étude. Quelle est l'espérance et la variance du nombre de carpes parmi ces 20 poissons ?

Exercice 8

Cinq urnes contiennent respectivement 1 boule blanche et 5 boules noires, 3 boules blanches et 3 boules noires, 6 boules blanches et 4 boules noires, 2 boules blanches et 6 boules noires, 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire au hasard une boule de chaque urne. Calcule l'espérance du nombre de boules blanches obtenues en tout.

Exercice 9

Dans un groupe de 100 personnes, calcule l'espérance du nombre de jours où exactement trois personnes ont leur anniversaire.

Exercice 10

On se donne deux points distincts $(a; b)$ et $(c; d)$ dans le plan. Calcule l'équation de la droite de régression linéaire qui approxime au mieux ce "nuage de points".

Exercice 11

Voici des estimations de la population de thon (en tonnes) dans l'Atlantique Est. En 1996, 210000 tonnes, en 1998 et 2000, 200000 tonnes, en 2002, 180000 tonnes, en 2004, 155000 tonnes, en 2006, 125000 tonnes, et en 2008, 80000 tonnes.

a) Etablis le coefficient de corrélation entre les variables X qui indique l'année (qu'on pourra renuméroter de 1 à 7) et Y la population des thons (qu'on pourra compter en milliers de tonnes pour économiser des zéros).

b) Peut-on dire que la population de thon décroît linéairement en fonction du temps ?

Exercice 12

Voici la taille en centimètres et le poids en kilogrammes de 10 enfants de 6 ans :

$$(121, 25), (123, 22), (108, 19), (118, 24), (111, 19), (109, 18), (114, 20), (103, 15), (110, 20), (115, 21).$$

a) Déterminer la variable indépendante X et la variable dépendante Y.

b) Calculer l'espérance de la taille et du poids.

c) Calculer la variance de ces variables et l'écart-type.

d) Calculer le coefficient de détermination et l'interprèter dans le contexte de l'étude.

e) Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés de ce nuage de points.

f) Utiliser cette régression linéaire pour estimer le poids moyen d'un enfant de 6 ans qui mesure 120 cm.

Exercices théoriques

Exercice 13

Montre que $E(aX+b) = aE(X)+b$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 14

Démontre que $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$.

Exercice 15

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de rencontre pour N personnes et N chapeaux. Le but est de calculer l'espérance et la variance de X. On introduit - astucieusement ! - la variable X_i qui vaut 1 si le $i$ème homme prend son propre chapeau et 0 sinon. Ainsi $X = X_1+X_2+\cdots+X_N$.

a) Calcule l'espérance de X_i et ensuite celle de X.

b) Calcule la variance de X_i et la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$.

c) Montre que la variance de X vaut 1 en appliquant la formule démontrée dans l'exercice précédent.

Exercice 16

On considère une variable aléatoire X, deux nombres réels a, b et la variable $Y = aX+b$. Montre que $\rho(X,Y) = 1$ si a est positif, et $\rho(X,Y) = -1$ si a est négatif. Que se passe-t-il si $a = 0$?

Exercice 17

Calcule qu'avec le modèle linéaire des moindres carrés, la moyenne des carrés des écarts ε_s vaut

$$\frac{1}{n}\sum_s \varepsilon_s^2 \;=\; \text{Var}(Y)\left(1 - \frac{\text{Cov}^2(X,Y)}{\text{Var}(X)\cdot\text{Var}(Y)}\right)$$

Exercice 18

Exercice de révision (baccalauréat, Delémont 2009)
Chez l'homme il existe quatre groupes sanguins, O, A, B et AB.
Lors d'un repas d'anniversaire, 10 personnes sont réunies dans un chalet, 3 du groupe O, 4 du groupe A, 2 du groupe B et 1 du groupe AB. Après le repas, par tirage au sort, on désigne successivement 3 personnes pour faire la vaisselle. Calcule la probabilité des événements suivants.

— E_1 : deux personnes exactement du groupe A sont désignées ;
— E_2 : la deuxième personne choisie est du groupe B ;
— E_3 : les trois personnes désignées sont du même groupe ;
— E_4 : les trois personnes désignées ont des groupes sanguins différents.

Dans chaque groupe, il y a deux facteurs Rhésus, plus et moins. En Suisse la répartition de la population selon les groupes sanguins est résumée dans le tableau suivant :

	O	**A**	**B**	**AB**
Rhésus +	35%	40%	7%	3%
Rhésus -	6%	7%	1%	1%

a) On rencontre au hasard une personne de nationalité suisse. Calcule la probabilité de l'événement "cette personne est du groupe A". Quelle est cette probabilité si l'on sait à l'avance qu'elle a un facteur Rhésus -.

b) La nouvelle classe du Cours Euler compte 20 élèves, tous domiciliés en Suisse. Calcule la probabilité qu'exactement 7 élèves de cette classe soient du groupe A. Calcule aussi la probabilité que dans cette classe on recense 5 élèves de chaque groupe sanguin.

c) Les cent députés du Grand Conseil genevois sont tous présents lors de la séance du 23 septembre ! Calcule une approximation de la probabilité qu'il y ait entre 38 et 50 individus (bornes comprises) du groupe sanguin A.
Remarque : Donne juste la formule sans faire le calcul, les calculatrices ne sont en général pas assez puissantes.