Série 4

Pour le 11 septembre 2024

Exercice 1

Déterminer si les événements suivants E et F sont dépendants ou indépendants :

a) On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. L'événement E est "tirer un as" et F est "tirer un coeur".

b) On lance deux pièces de monnaie. L'événement E est "la première pièce montre pile" et F est "la seconde montre face".

c) On lance deux dés équilibrés. L'événement E est "la somme des chiffres apparents vaut 6" et F est "le premier dé montre 4".

d) On lance deux dés équilibrés. L'événement E est "la somme des chiffres apparents vaut 7" et F est "le premier dé montre 4".

Exercice 2

On jette deux dés équilibrés. L'événement E est "la somme des chiffres apparents vaut 7", F est "le premier dé montre 4" et G est "le second dé montre 3". Discuter l'indépendance des événements E et F, E et G, E et $F \cap G$.

Exercice 3

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire trois boules l'une après l'autre sans les replacer dans l'urne. Quelqu'un parie qu'au moins l'une des trois boules portera un numéro plus grand ou égal à 17. A-t-il raison de le faire ?

Indication. Calcule la probabilité que le plus grand numéro tiré est égal à i, pour $3 \leq i \leq 20$ en comptant simplement le nombre de tirages favorables et le nombre de tirages possibles (on travaille donc avec la variable aléatoire X qui donne le plus grand numéro tiré).

Exercice 4

On place k boules jaunes, k boules vertes et k boules bleues dans une urne. On tire successivement deux boules de cette urne. Soit A l'événement "tirer deux boules de couleur différente", B_1 "tirer d'abord une boule bleue" et V_1 "tirer d'abord une boule verte". Montrer que A et B_1 sont indépendants et en déduire que A et V_1 le sont aussi. Mais qu'en est-il de A et $B_1 \cap V_1$?

Exercice 5

Etablir le graphe (diagramme en bâtons) de la loi de probabilité, ainsi que la fonction de répartition, de la variable aléatoire qui compte la somme obtenue lors du jet de deux dés équilibrés.

Exercice 6

Un bus passe à une station toutes les 20 minutes. Une personne arrive à cette station sans connaître l'horaire. On note X son temps d'attente en minutes.

a) Quelle est la probabilité que cette personne attende moins de 10 minutes ?
moins d'une minute ? moins de x minutes avec $x \in \mathbb{R}$?

b) Représenter la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 7

Un jeu de hasard coûte 3 francs la partie. Il consiste à tirer une carte au hasard dans un jeu de 36 cartes. Si l'on tire un coeur, on gagne 5 francs, et si l'on tire un carreau, on gagne 4 francs. Le tirage d'une carte noire (trèfle ou pique) ne rapporte rien.
Soit X le gain net d'un joueur. Calculer et interpréter l'espérance de X.

Exercice 8

Une urne contient 3 boules rouges et 6 boules noires.
Vous tirez au maximum trois boules. A chaque tentative, soit la boule tirée est rouge, vous gagnez 100 francs et le jeu s'arrête, soit elle n'est pas rouge, vous payez 50 francs et vous continuez le jeu sans remettre la boule tirée dans l'urne.
Accepteriez-vous de jouer à ce jeu ? Justifier par un calcul d'espérance.

Exercice 9

Un jeu consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées. On gagne 3 francs si l'on obtient deux fois face et 1 franc si l'on obtient une seule fois face. Par contre, il faut débourser k francs si l'on n'obtient aucune face. Quelle doit être la valeur de k si l'on veut que le jeu soit équitable ?

Exercice 10

Une urne contient deux pièces de un centime, deux pièces de 5 centimes et une pièce de 10 centimes. Si l'on paie 5 centimes, on reçoit deux pièces tirées de l'urne au hasard. On peut ensuite repayer 5 centimes pour recevoir à nouveau deux pièces tirées au hasard.

Quelle est l'espérance des gains au premier tirage ? Et au deuxième tirage ?
Quelle est l'espérance de gains totale après les deux tirages ? Dessiner un arbre peut aider.

Question complémentaire.
Et si l'on change les règles du jeu en remettant les pièces dans l'urne après le premier tirage ?

Exercice 11

Chuck-a-luck. On joue à ce jeu dans les pubs anglais. La banque lance trois dés et le joueur choisit un nombre. Si ce nombre apparaît exactement une fois, le joueur récupère sa mise, s'il apparaît deux fois, il récupère le double de sa mise, mais si le nombre joué apparaît sur les trois dés, le joueur récupère dix fois sa mise.
Par contre, si le nombre n'apparaît pas, le joueur perd sa mise.
Calculer l'espérance du gain net si le joueur joue une livre.

Exercices théoriques

Exercice 12

Déterminer un exemple d'une variable aléatoire discrète dont l'espérance n'existe pas.
Justifier votre proposition.

Exercice 13

Généralisation de la formule de multiplication au cas de plusieurs événements $A_1, \ldots, A_n$.

a) Commencer par le cas de trois événements A, B et C et démontrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$.
b) Utiliser cette formule pour calculer la probabilité de tirer 3 as de suite d'un jeu de 52 cartes. On utilisera les événements A_i "la i-ème carte tirée est un as" pour $1 \leq i \leq 3$ et on calculera $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
c) Trouver la formule générale dans le cas de n événements et la démontrer par récurrence.

Exercice 14

Démontrer que si les événements E et F sont indépendants, alors les événements E et le complémentaire F^c de F le sont aussi.