Solutions
Semaine 2

Cours Turing+

1 Représentations matricielles

a) Observant que $CNOT\,|0y\rangle = |0y\rangle$ et $CNOT\,|1y\rangle = |1\overline{y}\rangle$ pour tout $y \in \{0,1\}$, on en déduit que la représentation matricielle de la porte CNOT dans la base computationnelle $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ est donnée par

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(par exemple, $\langle 00|\,CNOT\,|00\rangle = \langle 00|00\rangle = 1$, $\langle 00|\,CNOT\,|01\rangle = \langle 00|01\rangle = 0$, tandis que $\langle 11|\,CNOT\,|10\rangle = \langle 11|11\rangle = 1$, etc.)

b) De même, $CCNOT\,|xyz\rangle = |xyz\rangle$ si $xy \neq 11$ et $CCNOT\,|11z\rangle = |11\overline{z}\rangle$, donc dans la base computationnelle $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$, la représentation matricielle de la porte CCNOT est donnée par

$$CCNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $U_f |x_1, x_2, y\rangle = |x_1, x_2, y \oplus (x_1 \oplus x_2)\rangle$, donc

$$\begin{cases} U_f |x_1, x_2, y\rangle = |x_1, x_2, y\rangle & \text{si } x_1 \oplus x_2 = 0 \\ U_f |x_1, x_2, y\rangle = |x_1, x_2, \overline{y}\rangle & \text{si } x_1 \oplus x_2 = 1 \end{cases}$$

et dans la base computationnelle $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$, la représentation matricielle de U_f est donc donnée par

$$U_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Analyse de circuits

a) Si le premier qubit $x = 0$, alors la porte CNOT n'a aucun effet, et dans ce cas, l'effet des deux portes successives H sur le second qubit s'annulent. Donc pour une entrée $|0, y\rangle$, la sortie est $|0, y\rangle$.

Si maintenant $x = 1$ et $y = 0$, alors après le passage du second qubit par la première porte H, l'état est donné par $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$, puis par $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |10\rangle)$ après le passage de la porte CNOT, donc le même état, et le second passage du second qubit par la porte H nous ramène à l'état initial $|1, 0\rangle$.

Finalement, si $x = y = 1$, alors après le passage du second qubit par la première porte H, l'état est donné par $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle)$, puis par $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle)$ après le passage de la porte CNOT. A nouveau, le second passage du second qubit par la porte H nous ramène à l'état initial, mais avec un facteur -1 devant: $-|1, 1\rangle$.

En résumé, la sortie de ce circuit vaut $(-1)^{xy} |x, y\rangle$.

b) Si le premier qubit $x = 0$ après le passage de la porte H, alors la succession des états à travers les deux portes CNOT successives est donnée par

$$|0, y, z\rangle \quad \to \quad |0, y, z\rangle \quad \to \quad |0, y, z \oplus y\rangle$$

Si le premier qubit $x = 1$ après le passage de la porte H, alors la succession des états à travers les deux portes CNOT successives est donnée par

$$|1, y, z\rangle \quad \to \quad |1, \overline{y}, z\rangle \quad \to \quad |1, \overline{y}, z \oplus \overline{y}\rangle$$

La sortie du premier qubit après la porte H est donnée par $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^x |1\rangle)$, donc la sortie globale du circuit est donnée par

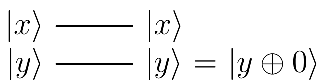
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0, y, z \oplus y\rangle + (-1)^x |1, \overline{y}, z \oplus \overline{y}\rangle)$$

Dans le cas particulier où $(x, y, z,) = (0, 0, 0)$, la sortie du circuit vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$; cet état est appelé "état GHZ" : il est encore plus intriqué que l'état de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ vu lors du premier cours.

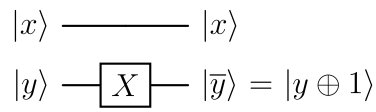
3 Construction de la porte oracle U_f

Les 4 portes U_f are sont données respectivement par

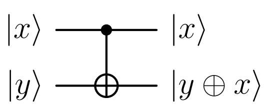
(1) Pour $f_1(x) = 0$:



(2) Pour $f_2(x) = 1$:



(3) Pour $f_3(x) = x$:



(4) Pour $f_4(x) = \overline{x}$: