Solutions
Semaine 1

Cours Turing+

1 Circuits classiques

a) La première composante de la fonction vaut :

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \text{ AND } x_2) \text{ OR } (x_2 \text{ OR } x_3)$$

donc $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ si et seulement si $x_2 = 1$ ou $x_3 = 1$ (remarquez que la première partie du circuit calculant (x_1 AND x_2) est donc inutile ici).

La seconde composante de la fonction vaut :

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{NOT } (x_3 \text{ AND } x_4) = (\text{NOT } x_3) \text{ OR } (\text{NOT } x_4) \quad \text{(relation de De Morgan)}$$

donc $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ si et seulement si $x_3 = 0$ ou $x_4 = 0$.

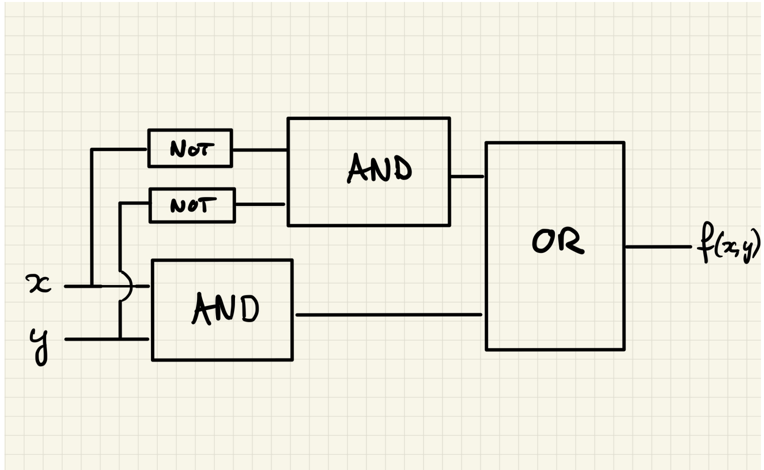
De là, on peut calculer le tableau de toutes les valeurs possibles de f_1 et f_2 en fonction de celles de x_1, x_2, x_3 et x_4 :

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1	f_2
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0
...	...	...	...	...	...

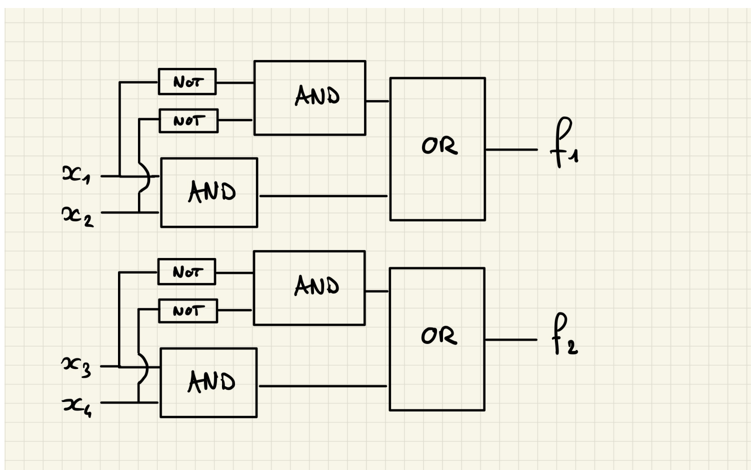
b) La construction du circuit pour $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ telle que $f(x, y) = 1$ si et seulement si $x = y$ s'obtient en remarquant que

$$f(x, y) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad (x = 1 \text{ et } y = 1) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y = 0)$$

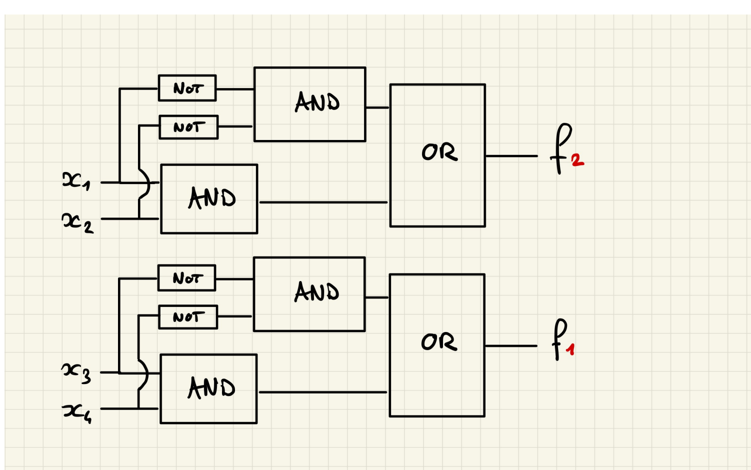
donc $f(x, y) = (x \text{ AND } y) \text{ OR } (\text{NOT } x \text{ AND NOT } y)$ et le circuit est celui donné au haut de la page suivante.



Le circuit final est le suivant : (il est en fait composé de deux sous-circuits identiques, pour x_1, x_2 et f_1 d'une part et x_3, x_4 et f_2 d'autre part)

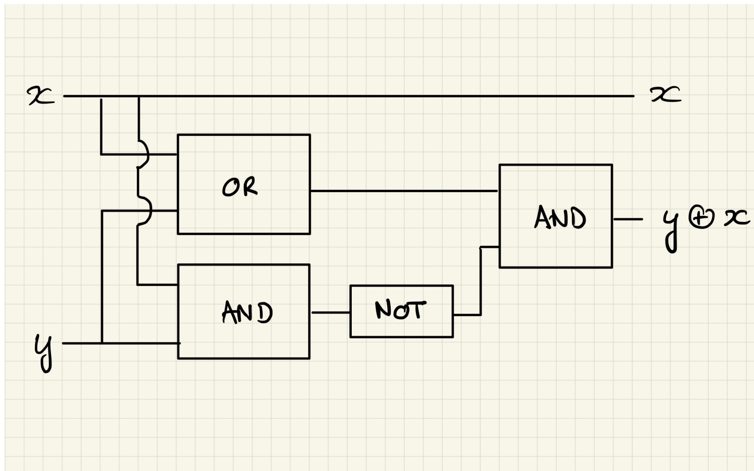


b*) Pourquoi ce cas, il suffit en fait d'inverser les sorties f_1 et f_2 pour obtenir ce qu'on veut!

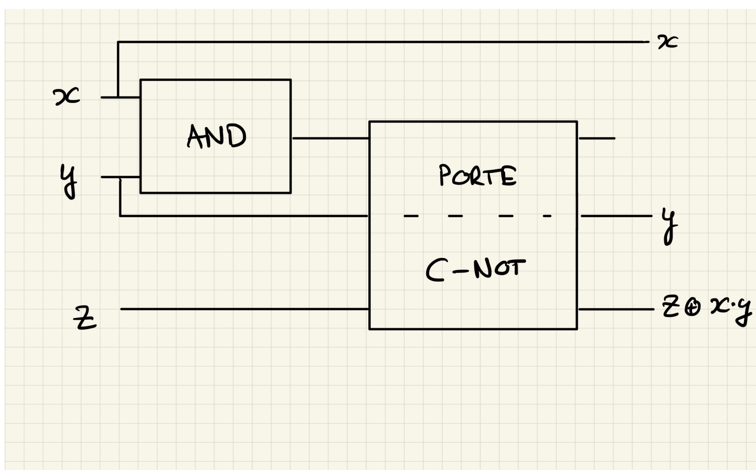


2 Ensembles de portes universels

Voici la porte C-NOT, obtenue en remarquant que $x \oplus y = (x \text{ OR } y) \text{ AND NOT } (x \text{ AND } y)$:



Et voici la porte CC-NOT, ou Toffoli, obtenue à l'aide de la porte précécente :



3 Etats quantiques produits et intriqués

L'état (i) est un état de Bell (donc intriqué).

L'état (ii) est un état produit : $= |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

L'état (iii) est un état intriqué.

L'état (iv) est un état produit : $= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

L'état (v) est un état produit : $= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.