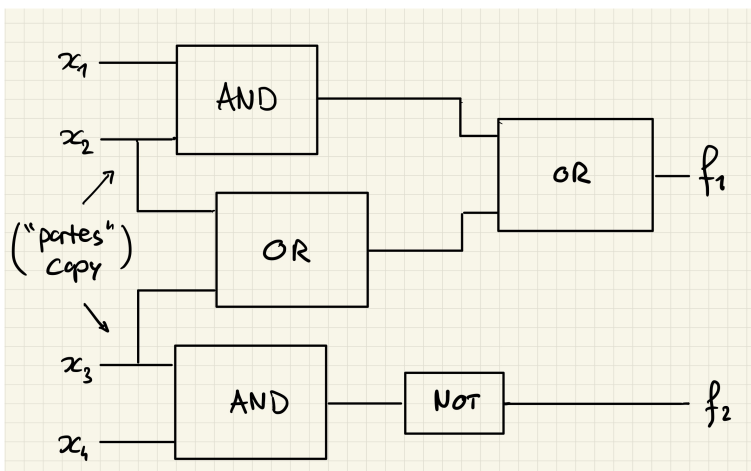
Exercices
Semaine 1

Cours Turing+

1 Circuits classiques

a) Quelle est la fonction booléenne $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^2$ que calcule le circuit suivant ?



b) Construisez un circuit classique qui calcule la fonction booléenne $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^2$ définie comme suit :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{cases} (1,1) & \text{si } x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = x_4 \\ (1,0) & \text{si } x_1 = x_2 \text{ et } x_3 \neq x_4 \\ (0,1) & \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ et } x_3 = x_4 \\ (0,0) & \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ et } x_3 \neq x_4 \end{cases}$$

Indication: Commencez par construire un circuit pour une fonction $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ telle que $f(x,y) = 1$ si et seulement si $x = y$: ce circuit sera un sous-circuit de votre circuit final.

b*) Cas plus difficile (?):

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{cases} (1,1) & \text{si } x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = x_4 \\ (0,1) & \text{si } x_1 = x_2 \text{ et } x_3 \neq x_4 \\ (1,0) & \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ et } x_3 = x_4 \\ (0,0) & \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ et } x_3 \neq x_4 \end{cases}$$

2 Ensembles de portes universels

Au cours, vous avez vu que :

- L'ensemble des portes {NOT, AND, OR et COPY} est universel, en ce sens qu'il est toujours possible de construire un circuit composé de portes de ce type pour calculer n'importe quelle fonction booléenne f.

- Les portes NOT, AND, OR et COPY peuvent toutes être construites à partir des portes réversibles NOT, C-NOT et CC-NOT (=Toffoli). En ce sens, l'ensemble des portes {NOT, C-NOT et CC-NOT} est également universel.

Dans cet exercice, on vous demande de montrer l'inverse, à savoir comment les portes NOT, C-NOT et CC-NOT peuvent elles-mêmes être construites à partir des portes NOT, AND, OR et COPY.

3 Etats quantiques produits et intriqués

Lesquels des états quantiques suivants (dans $\mathbb{R}^4 \sim \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$) sont des états produits, lesquels sont des états intriqués ?

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |01\rangle\right)$ (iii) $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\right)$

(iv) $\frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\right)$ (v) $\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right)$

Indication : Un critère simple pour décider si un état donné

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$$

est un état produit est le suivant : $\det\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{pmatrix} = \alpha_{00}\,\alpha_{11} - \alpha_{01}\,\alpha_{10} = 0.$