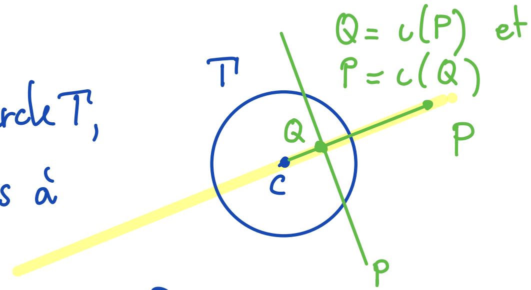
VI. Les inversions

1 Les inversions

Dans un cours classique de géométrie, on se restreint souvent à l'étude des transformations du plan ou de l'espace qui sont linéaires ou affines, qui préservent les distances ou au moins les rapports de distance. Or, il existe des transformations importantes qui ne sont pas du tout de cette forme, mais qui préservent les angles plutôt que les distances. L'usage des inversions remonte à Poncelet (1788-1867 ; élève de Monge ; prisonnier pendant les guerres napoléoniennes en Russie en 1812, il reprend tous les fondements de la géométrie et met en forme les bases de la géométrie projective, privé de tout livre ! A son retour en France en 1814, il rédige un traité qui sera publié en 1822 et qui aura une grande influence).

Considérons un cercle Γ dans le plan, de centre C et de rayon r. L'inversion est une application du plan, privé de C, dans lui-même qui fixe le cercle et "inverse" l'intérieur et l'extérieur du cercle.

Définition 1.1. L'*inversion* par rapport au cercle $\Gamma(C; r)$ est l'application ι qui envoie un point P distinct de C sur le point $\iota(P) = Q$ dans la direction $[CP]$ tel que $||CP|| \cdot ||CQ|| = r^2$.
On appelle r le *rapport d'inversion*, le cercle Γ le *cercle d'inversion* et C le *pôle d'inversion*.



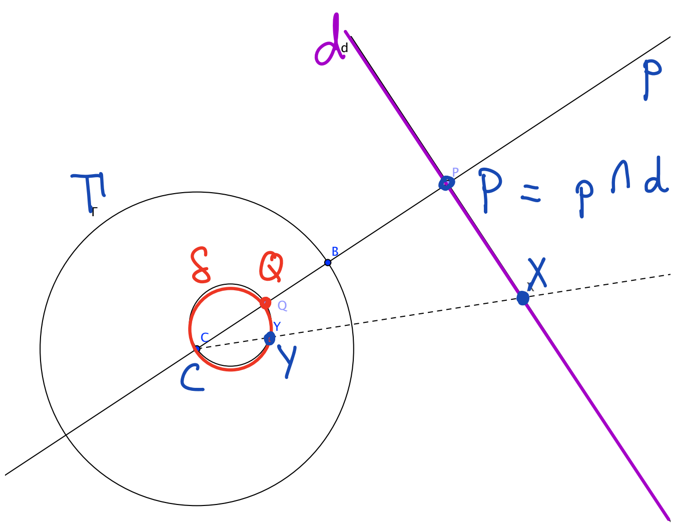
On déduit immédiatement de la définition que

- le cercle Γ est fixe par inversion de cercle Γ,
- les points à l'exterieur Γ sont envoyés à l'intérieur de Γ et inversément.
- L'image de P se trouve sur CP ∩ polaire de P.
- $\iota \circ \iota = \mathrm{Id}$. On dit que c'est une involution.

Etudions l'effet d'une inversion sur les droites et les cercles du plan.

Proposition 1.2. *L'inverse d'une droite passant par le pôle d'inversion est cette même droite, l'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle passant par le pôle. L'inverse d'un cercle passant par le pôle est une droite.*

Démonstration. Par définition l'inverse d'un point d'une droite passant par C reste sur cette droite. Considérons une droite d ne passant pas par C. Abaissons la perpendiculaire à d passant par C. Soit P le pied de cette perpendiculaire et son image par inversion $Q = \iota(P)$.
Montrons maintenant que le cercle de diamètre CQ est l'image de d.



p = perpendiculaire d passant par C

$Q = \iota(P)$ qu'on sait donc construire.

Montrons que $\delta = \iota(d)$ par inversion de cercle Γ.

Soit $X \in d$. CX coupe δ en $Y \neq C$.

$\Delta CQY \sim \Delta CXP$ (un angle commun en C + un angle ⊥ chacun)

$\Rightarrow \dfrac{\|CQ\|}{\|CX\|} = \dfrac{\|CY\|}{\|CP\|} \iff \|CY\| \cdot \|CX\| = \|CQ\| \cdot \|CP\| = r^2$ □

$\Rightarrow \iota(X) = Y \Rightarrow \iota(Y) = X \Rightarrow \iota(d) = \delta$ et $\iota(\delta) = d$.

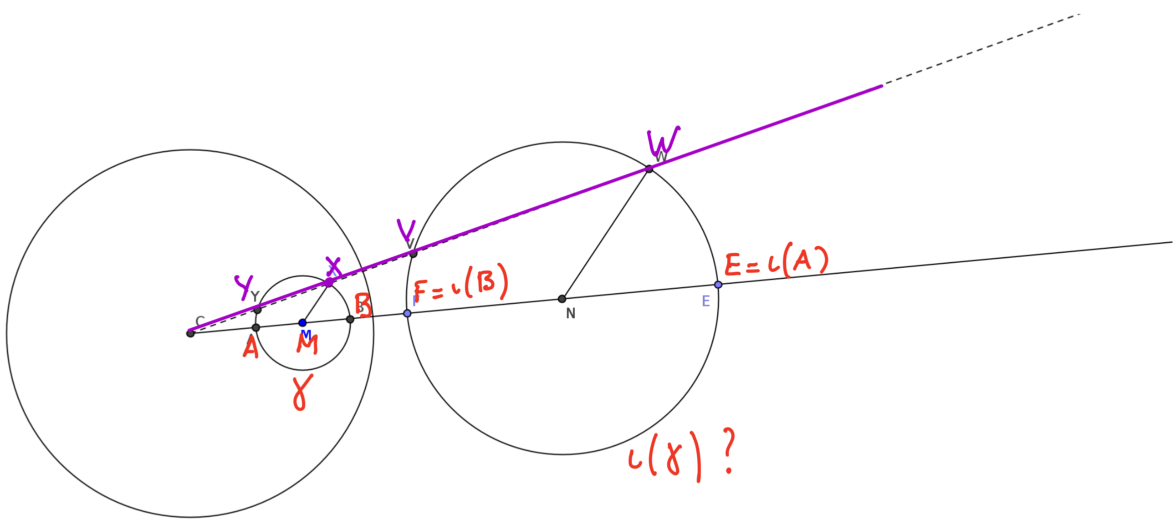
Même si les inversions transforment des droites en cercles, nous verrons qu'elles préservent les angles ! En fait, il faut voir les inversions comme des généralisations des symétries axiales dans une géométrie où les droites sont considérées comme des cercles de rayon infini. On peut alors effectuer des symétries axiales d'axe circulaire en toute généralité et naturellement les images de cercles sont des cercles, dont le rayon peut être fini ou infini !

2 Les inversions et les cercles

Nous savons construire l'image par ι d'un cercle qui passe par C.
Mais quelle est l'image d'un cercle qui ne passe pas par le pôle d'inversion ?

Proposition 2.1. *L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle homothétique du premier par rapport au pôle d'inversion.*

Démonstration. Traçons la demi-droite joignant C au centre M du cercle $\gamma(M, \rho)$ à inverser. Elle détermine un diamètre $[AB]$ de γ. Construisons les images $\iota(A) = E$ et $\iota(B) = F$. Nous affirmons que le cercle γ' de diamètre $[EF]$ est l'image du cercle donné $\gamma(M, \rho)$.



Appelons N le centre de γ' et calculons les rapports des rayons ρ et ρ' des cercles γ et γ'.

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{AB}{FE} = \frac{CB - CA}{CE - CF} = \frac{CB - CA}{\frac{r^2}{CA} - \frac{r^2}{CB}} \cdot \frac{CA \cdot CB}{CA \cdot CB} = \frac{CA \cdot CB \, \cancel{(CB - CA)}}{r^2 \, \cancel{(CB - CA)}}$$

faire apparaître C

$r^2 = CA \cdot CE = CB \cdot CF$ par définition de l'inversion

De plus
$$\frac{CM}{CN} = \frac{\frac{1}{2}(CA + CB)}{\frac{1}{2}(CE + CF)} = \frac{CA + CB}{\frac{r^2}{CA} + \frac{r^2}{CB}} \cdot \frac{CA \cdot CB}{CA \cdot CB} = \frac{CA \cdot CB \, \cancel{(CA + CB)}}{r^2 \, \cancel{(CB + CA)}}$$

faire apparaître CA et CB et CE et CF

Par conséquent, le rapport des rayons des deux cercles est égal au rapport des distances du pôle d'inversion aux centres de ces cercles. Ceci signifie précisément que les cercles sont

homothétiques de centre C, le pôle d'inversion.

Gardons cela en mémoire et considérons un point arbitraire X du premier cercle. Traçons la demi-droite issue de C et passant par X. Elle coupe le cercle de centre $\cancel{C}$ M en un autre point Y et celui de centre N en deux points V et W. Puisque les cercles sont homothétiques, les triangles ΔCMX et ΔCNW sont semblables, donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{MX}{NW} = \frac{CX}{CW} \implies CX = \frac{\rho}{\rho'} \cdot CW \qquad (A)$$

De même, les triangles ΔCMY et ΔCNV sont semblables, donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{MY}{NV} = \frac{CY}{CV} \implies CV = \frac{\rho'}{\rho} \cdot CY \qquad (B)$$

Montrons enfin que le produit $||CX|| \cdot ||CV||$ vaut bien r^2. On a

Par (A) et (B), $CX \cdot CV = CW \cdot CY$ (C)

De plus, par le thm du produit constant pour C et γ, $CY \cdot CX = CA \cdot CB$ (*)

et par ce même thm pour C et γ', $CV \cdot CW = CF \cdot CE$ (*)

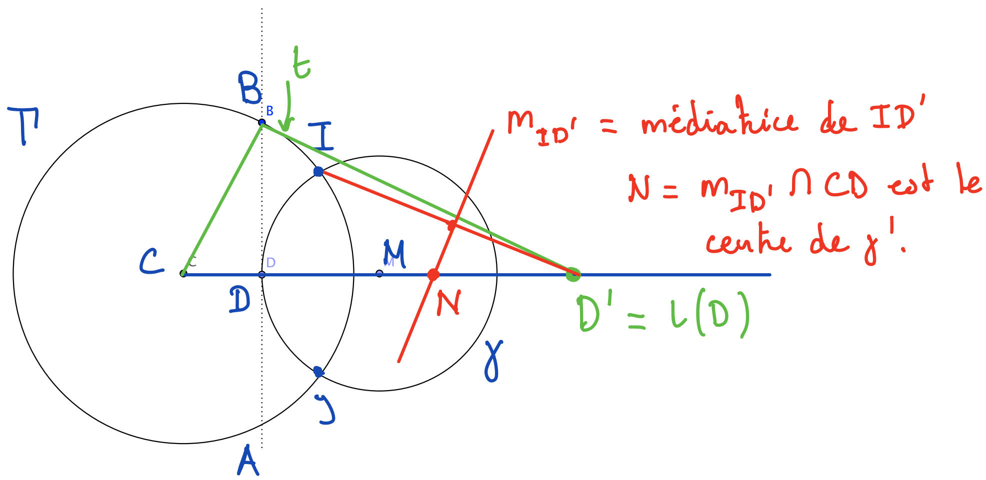
$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } (CX \cdot CV)^2 &= CX \cdot CV \cdot CX \cdot CV \\
&\overset{(C)}{=} CY \cdot CW \cdot CX \cdot CV = (CY \cdot CX) \cdot (CV \cdot CW) \\
&\overset{\text{Thm. prod. constant}}{\underset{(*)}{=}} CA \cdot CB \cdot CF \cdot CE \\
&= (CA \cdot CE)(CB \cdot CF) \\
&= r^2 \cdot r^2 = r^4
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2. Nous avons montré que l'image par inversion d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle homothétique. Mais la preuve montre que l'image par l'inversion du centre M n'est pas le centre N ! Où se trouve l'image de M ? Est-elle plus proche de F ou de E ?

$\iota(M)$ est plus proche de F car $\iota(MB) < \iota(MA)$

Exemple 2.3.
Construisons l'image du cercle γ de centre M par l'inversion par rapport au cercle Γ de centre C.

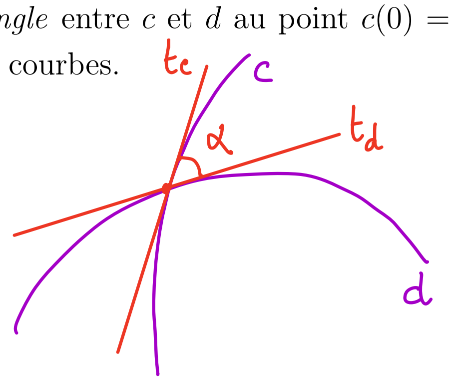


On connait déjà deux points I et J de $\iota(\gamma)$: ce sont les points d'intersection des cercles γ et Γ. Pour déterminer l'image de γ, il suffit donc de construire l'image d'un troisième point de γ. Choisissons $D = \gamma \cap CM$ et traçons la tangente t en D à γ. t coupe γ en A et B. L'image de la tangente t est un cercle passant par le pôle C et par A et B. La deuxième intersection de ce dernier cercle avec l'axe CM donne l'image de D.

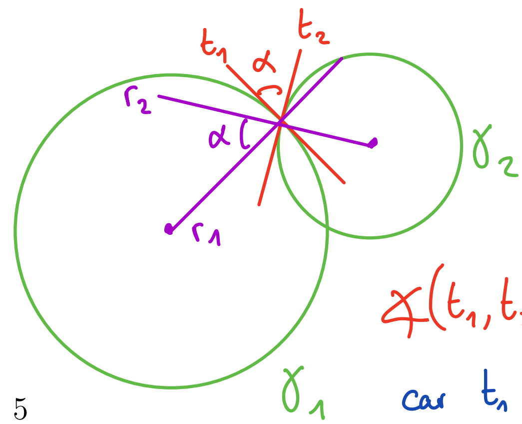
3 Les inversions et les angles

Notre but est de montrer que les inversions préservent les angles. Définissons d'abord en toute généralité ce qu'est l'angle entre deux courbes dérivables du plan.

Définition 3.1. Soit $c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux courbes dérivables dans le plan qui se coupent en $t = 0$. L'*angle* entre c et d au point $c(0) = d(0)$ est l'angle formé en ce point par les vecteurs tangents aux courbes.



Pour les cercles :



$\measuredangle(t_1, t_2) = \measuredangle(r_1, r_2)$

car $t_1 \perp r_1$ et $t_2 \perp r_2$

Remarquons que l'angle entre deux cercles peut aussi être décrit comme l'angle formé par les rayons respectifs du centre au point d'intersection. Dans notre étude des inversions nous n'aurons besoin que des angles entre cercles et droites. Il y a plusieurs cas à considérer, mais il suffit d'étudier le cas de l'angle formé par deux droites puisque chaque cercle est remplacé par la droite tangente pour mesurer l'angle. Le premier cas est élémentaire : deux droites passant par le pôle d'inversion sont fixées par l'inversion si bien que l'angle reste le même.

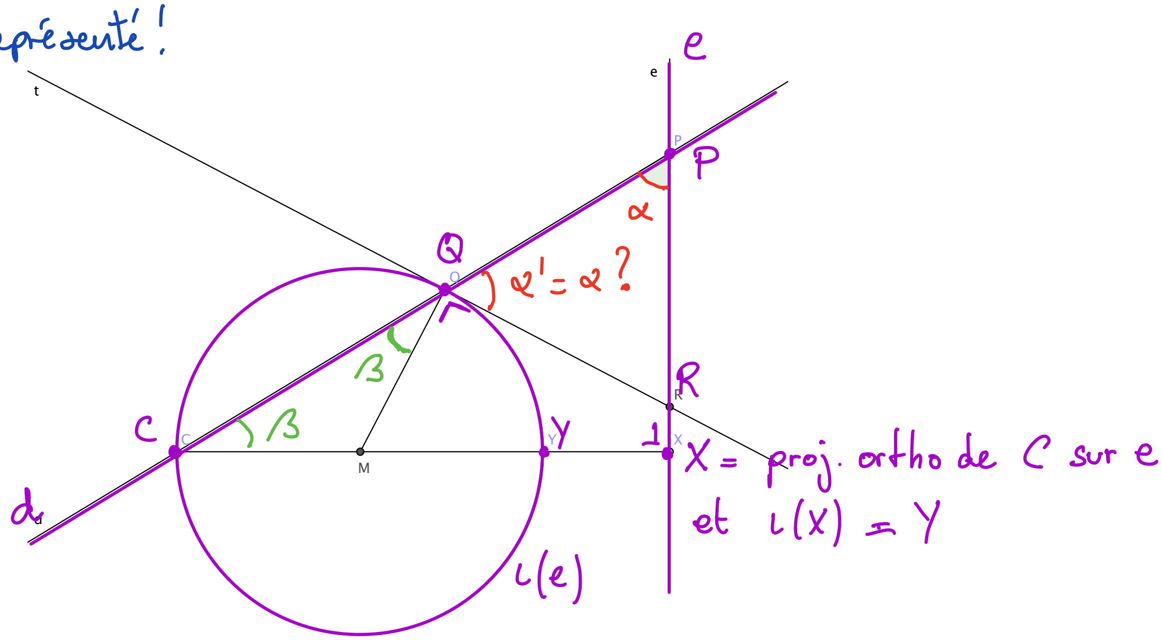
Proposition 3.2. *Soit d une droite passant par le pôle d'inversion C et sécante en un point $P \neq C$ avec une droite e.*
Alors l'angle formé par la droite d et la droite e est égal à celui formé par d et le cercle $\iota(e)$.

Démonstration. Construisons d'abord l'inverse de la droite e. C'est un cercle $\iota(e)$ passant par C .
L'image $\iota(d) =$ d , si bien que l'image $\iota(P) = Q =$ $\iota(d) \cap \iota(e)$.

Soit t la tangente au cercle $\iota(e)$ au point $Q = \iota(P)$.

Nous devons montrer que l'angle formé par $\iota(d) =$ d et t est égal à l'angle entre d et e en P.

T n'est pas représenté !
$\iota(e)$ l'est.



Soit R le point d'intersection de t et e. Observons que l'angle formé par le rayon $[MQ]$ et la tangente est un angle droit, si bien que

si $\beta = \measuredangle CQM$, on a $\beta + \alpha' = \frac{\pi}{2}$

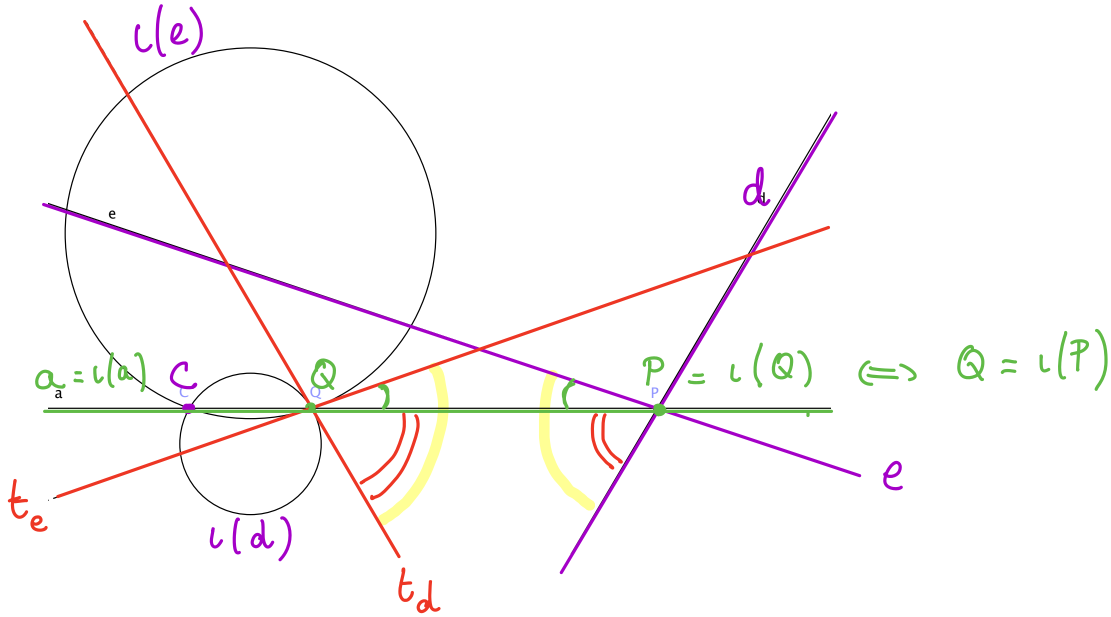
Comme $MC = MQ$, $\triangle MCQ$ est isocèle en M $\Rightarrow \measuredangle MCQ = \beta$

Or le triangle CXP est rectangle en X $\Rightarrow \beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$

Ainsi $\alpha = \alpha'$. □

Proposition 3.3. *Soit d et e deux droites ne passant pas par le pôle d'inversion C et sécantes en un point P. Alors l'angle formé par ces droites est égal à celui formé par les cercles $\iota(d)$ et $\iota(e)$.*

Démonstration. Les images de d et e sont deux cercles passant par le pôle d'inversion C. L'image de P est l'autre point d'intersection Q de ces deux cercles.



Introduisons la droite annexe $a = CP$, qui est fixée par l'inversion. Alors les angles en P entre a et d et entre a et e sont préservés par l'inversion (par la proposition précédente). Le résultat est alors immédiat. □

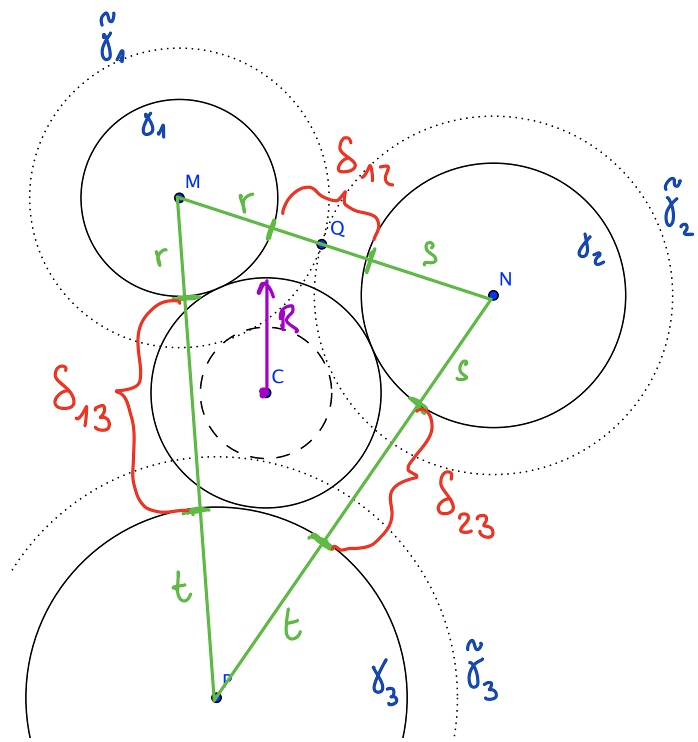
Théorème 3.4. *Les inversions préservent les angles entre droites et cercles.*

4 Le problème d'Apollonius

Le problème d'Apollonius consiste à construire un cercle tangent à trois cercles donnés. La solution utilise des inversions car il est plus aisé de raisonner avec des droites qu'avec des cercles. Avant de commencer, remarquons que la propriété d'être tangent est préservée par inversion puisque deux cercles sont tangents si et seulement si ils ont un unique point commun.

Pour fixer les idées, supposons que les cercles $\gamma_1(M,r)$, $\gamma_2(N,s)$ et $\gamma_3(P,t)$ sont donnés. Supposons ensuite que les distances δ_{ij} entre deux cercles γ_i et le γ_j soient telles que

$$\delta_{13} = ||MP|| - r - t \quad \geq \quad \delta_{23} = ||NP|| - s - t \quad \geq \quad \delta_{12} = ||MN|| - r - s.$$

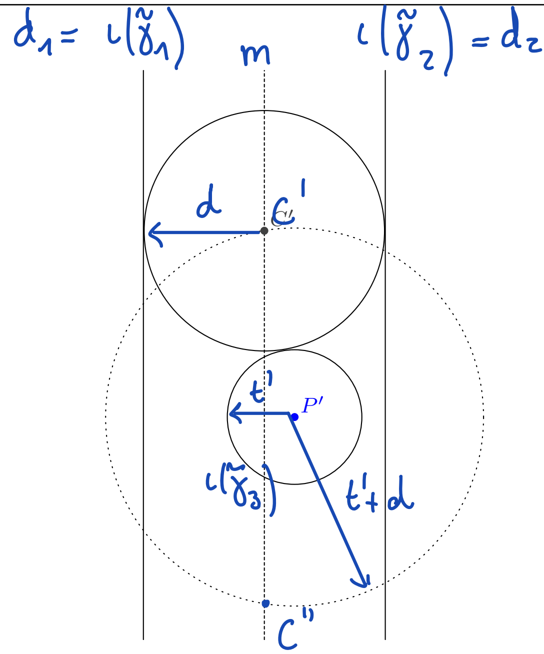


Ainsi, un cercle de centre C et de rayon R est tangent à la fois aux cercles $\gamma_1(M,r)$ et $\gamma_2(N,s)$ si et seulement si le cercle de même centre C et de rayon $R - \delta_{12}/2$ est tangent à la fois aux cercles de centre M et N et de rayon respectif $r + \delta_{12}/2$ et $s + \delta_{12}/2$

Augmentons donc les rayons des trois cercles γ_1, γ_2 et γ_3 de $\delta_{12}/2$.

Les deux cercles qui étaient le plus proche deviennent alors tangents en un point Q.

L'astuce est d'appliquer une inversion de centre Q qui transforme les deux cercles tangents en Q en deux droites parallèles tangentes … à l'infini … et le troisième cercle en un cercle homothétique de centre P' et de rayon t'.



Les cercles tangents à $d_1 = \iota(\tilde{\gamma}_1)$ et $d_2 = \iota(\tilde{\gamma}_2)$ ont leur centre sur la droite m // à d_1 et d_2, équidistante de d_1 et d_2.

Leur rayon $d = \dfrac{\delta(d_1, d_2)}{2}$

Le cercle de centre P' et de rayon $t'+d$ coupe m en C' et C''

En appliquant l'inversion une nouvelle fois, on résout le problème d'Apollonius.

Il y a deux centres possibles pour un cercle tangent aux deux droites parallèles et au cercle de centre P'. Le problème d'Apollonius aurait-il deux solutions ?