V. Mouvements dans l'espace

Le sujet de ce jour nous ramène à la géométrie vectorielle avec la définition de mouvements dans l'espace puis de forme bilinéaire. Nous retrouverons le produit vectoriel que nous connaissons déjà et découvrirons une de ses propriétés remarquables.
Nous terminerons le cours avec la notion de polaire, dont nous aurons besoin la semaine prochaine pour étudier un type de transformations du plan inhabituelles : les inversions.

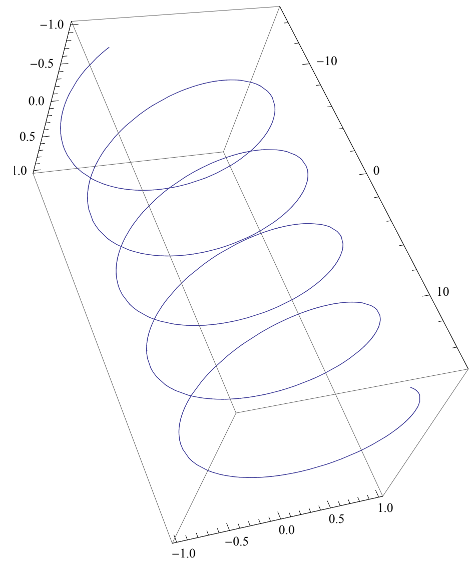
1 Mouvements dans l'espace

Vous avez étudié les isométries du plan en détail, puis celles de l'espace. L'idée de l'étude des "mouvements" est que les isométries directes peuvent s'interpréter comme des déformations continues de l'espace. Par exemple, pour effectuer une translation horizontale de 30 centimètres, disons d'un crayon, nous pouvons le soulever et le déplacer continûment pour l'amener à la position désirée. Nous faisons cette étude de mouvement dans $\mathbb{R}^3$ à cause de nos motivations, mais pourrions tout aussi bien remplacer l'espace par $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 1.1. Une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est déterminée par ses trois coordonnées f_1, f_2, f_3 telles que $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Une telle fonction est *continue* si ses fonctions de coordonnées f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions réelles continues.

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

Exemple 1.2. La fonction $f(t) = (\cos t; \sin t; t)$ est continue car chacune des fonctions f_i est continue. Elle est même infiniment continûment dérivable.
Elle décrit une hélice infinie, qui se situe sur le cylindre droit d'axe Oz et de rayon 1.



Définition 1.3. Un *mouvement* est une famille d'isométries g_t de $\mathbb{R}^3$, pour $t \in [0,1]$, telle que

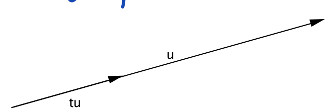
a) g_0 est l'identité ;

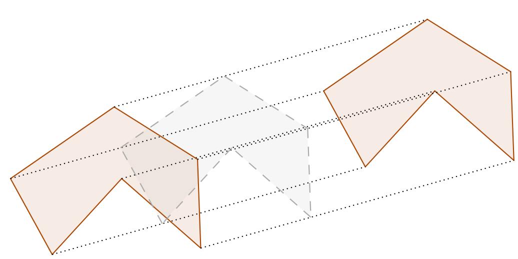
b) pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ avec $t \mapsto g_t(x)$ est continue.

Exemple 1.4. Translation continue. Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un ~~point de $\mathbb{R}^3$~~ vecteur de $V(\mathbb{R}^3)$ et posons $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + t\vec{v}$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors $g_0(x) =$ $\vec{x} + 0\vec{v} = \vec{x}$

Pour x fixé, $f : [0;1] \to V^3$, $t \to \vec{x} + t\vec{v}$ est continue car pour chaque

f_i, $f_i(t) = x_i + tv_i$, $i = 1, 2, 3$ est continue.





Concentrons-nous à présent sur les mouvements de l'espace décris en termes vectoriels.

Exemple 1.5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et de même norme de $\cancel{\mathbb{R}^3}$ V_3. Nous aimerions construire un mouvement qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Comment faire ?

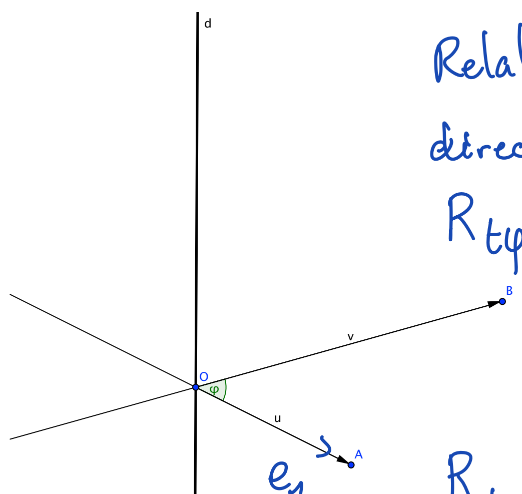
Soit $\vec{d}$ ~~la droite passant par l'origine~~ un vecteur, perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et soit φ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Posons, pour tout $0 \leq t \leq 1$, $\quad g_t(x) = \rho_{t\varphi}(x)$

où ρ_α est la rotation d'angle α (ici $\alpha = \alpha(t) = t\varphi$)

Alors, $g_0(x) = x$ et pour x fixé, $f : [0,1] \longrightarrow V_3$, $t \longmapsto \rho_{t\varphi}(x)$ est continue.

Posons $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$



Relativement à la base orthonormée directe $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice $R_{t\varphi}$ de l'application $\rho_{t\varphi}$ est

$$R_{t\varphi} = \begin{pmatrix} \cos t\varphi & -\sin t\varphi & 0 \\ \sin t\varphi & \cos t\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $g_t(\vec{x}) = R_{t\varphi}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cos t\varphi - x_2 \sin t\varphi \\ x_1 \sin t\varphi + x_2 \cos t\varphi \\ x_3 \end{pmatrix}$

Proposition 1.6.
Les isométries g_t qui constituent un mouvement sont directes, c'est-à-dire, préservent l'orientation.

Démonstration. Fixons un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ et suivons les vecteurs de base pendant le mouvement g_t. Pour fixer les idées, supposons que le vecteur $\vec{e_3}$ se trouve dans le demi-espace supérieur délimité par le plan $< \vec{e_1}, \vec{e_2} >$, c'est-à-dire celui dans lequel on *visse* un tire-bouchon en amenant $\vec{e_1}$ sur $\vec{e_2}$. Le raisonnement est le même dans le cas contraire !

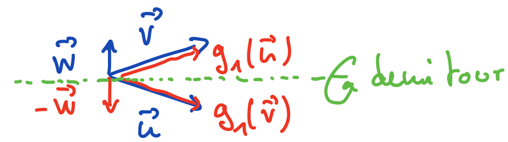
Puisque g_t est une isométrie $\forall t$, chaque triplet $(g_t(\vec{e}_1); g_t(\vec{e}_2); g_t(\vec{e}_3))$ forme une base orthormée de V_3, donc une famille libre.

En particulier, $g_t(\vec{e}_3)$ n'est pas dans le plan $\langle g_t(\vec{e}_1); g_t(\vec{e}_2)\rangle$.

Et puisque $g_t(\vec{e}_i)$ sont continues en t pour $i = 1, 2, 3$, $g_t(\vec{e}_3)$ reste toujours "du même côté" des plans $\langle g_t(\vec{e}_1); g_t(\vec{e}_2)\rangle$.

Ainsi l'orientation des bases $(g_t(\vec{e}_i), i = 1, 2, 3)$ est toujours la même. Donc les isométries directes sont des mouvements. □

Exemple 1.7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ de même norme et $\vec{w}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Alors, il existe un mouvement g_t tel que $g_1(\vec{u}) = \vec{v}$, $g_1(\vec{v}) = \vec{u}$ et $g_1(\vec{w}) = -\vec{w}$.
A résoudre en exercice !



2 Forme bilinéaire

Définition 2.1. Soient U, V et W trois K-espaces vectoriels et $\alpha : U \times V \to W$ une application. On dit que α est *bilinéaire* si $\alpha(u, -) : V \to W$ et $\alpha(-, v) : U \to W$ sont linéaires pour tout $v \in V$.

↘ u fixé ↘ v fixé et pour tout $u \in U$

Exemple 2.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1×2 2×1 1×1

Soit $\alpha : \mathbb{V}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha(X; Y) = X^T AY$

Ainsi, $\alpha(X; Y) = X^T AY = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\cdot\begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix}$

$= x_1ay_1 + x_1by_2 + x_2cy_1 + x_2dy_2$

et $\alpha(X; kY + \ell Z) = \ldots = k\alpha(X; Y) + \ell\alpha(X; Z)$

et $\alpha(kX + \ell Y; Z) = k\alpha(X; Y) + \ell\alpha(Y; Z)$

Cette application est bilinéaire. On dit que c'est une *forme bilinéaire* de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.3. Le produit vectoriel $\wedge : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ est une forme bilinéaire.
En effet, si l'espace vectoriel $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ v_1u_3 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

, qui est bien bilinéaire

car $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\,\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\,\vec{u} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Le théorème du jour affirme que la seule application bilinéaire de l'espace qui est invariante par tous les mouvements est le produit vectoriel.

Ce résultat est essentiel en physique pour aborder les mouvements des astres en cosmologie car le moment cinétique $\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$ où $\vec{R}$ est le vecteur position et $\vec{P}$ la quantité de mouvement $m\vec{v}$.

Théorème 2.4. *Soit $j : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ une application telle que*

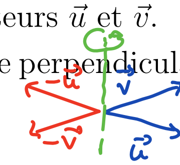
a) j est bilinéaire ;

b) $j(g_t(\vec{u}), g_t(\vec{v})) = g_t(j(\vec{u}, \vec{v}))$ pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tout mouvement g_t. (= Invariance de j par rapport au mouvement)

Alors il existe un nombre réel λ tel que $j(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Démonstration. Observons d'abord que par bilinéarité $j(\vec{u}, \vec{0}) = \vec{0}$ et $j(\vec{0}, \vec{v}) = \vec{0}$. ($\alpha(0_u) = 0_v$ si α est linéaire)
Nous supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls dès maintenant.

Commençons par montrer que $\vec{w} = j(\vec{u}, \vec{v})$ est toujours orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Considérons le mouvement g_t correspondant à la rotation d'angle π autour d'un axe perpendiculaire au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ que vous décrirez en exercice.

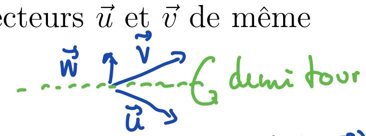


(*) Alors, $g_1(\vec{u}) = -\vec{u}$ et $g_1(\vec{v}) = -\vec{v}$.
De plus, si $j(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{n} + \vec{k}$ avec $\vec{n}$ normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{k} \in <\vec{u}; \vec{v}>$, alors par bilinéarité,
$j(-\vec{u}, -\vec{v}) = -j(\vec{u}, -\vec{v}) = j(\vec{u}; \vec{v}) = \vec{n} + \vec{k}$

D'autre part, par invariance par rapport au mouvement g_t, on a
$j(-\vec{u}, -\vec{v}) \overset{(*)}{=} j(g_1(\vec{u}); g_1(\vec{v})) \overset{b)}{=} g_1(j(\vec{u}, \vec{v})) = g_1(\vec{n} + \vec{k}) = \vec{n} - \vec{k}$

Par conséquent, $j(-\vec{u}; -\vec{v}) = \vec{n} + \vec{k} = \vec{n} - \vec{k} \Rightarrow \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow j(\vec{u}, \vec{v}) \perp$ à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Montrons maintenant que $j(\vec{u}, \vec{v}) = -j(\vec{v}, \vec{u})$.
Le deuxième mouvement h_t que vous décrirez en exercice échange deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même norme et renverse les vecteurs $\vec{n}$ qui leur sont perpendiculaires.



Ainsi, $h_1(\vec{u}) = \vec{v}$ et $h_1(\vec{v}) = \vec{u}$ et par suite,
$j(\vec{v}, \vec{u}) = j(h_1(\vec{u}); h_1(\vec{v})) \overset{b)}{=} h_1(j(\vec{u}; \vec{v})) = h_1(\vec{n}) = -\vec{n} = -j(\vec{u}, \vec{v})$
Remarquons en particulier que $j(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{0}$.
Choisissons maintenant une base orthonormée $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$.
Nous savons que $j(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \lambda_{ij}\vec{e_k}$ pour $1 \leq i \neq j \leq 3$ et où $k \neq i, j$ puisque le vecteur obtenu est orthogonal à $\vec{e_i}$ et à $\vec{e_j}$. De plus $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$. Observons encore que

$$0 = j(\vec{e_1}; \vec{e_2} + \vec{e_3}) \cdot (\vec{e_2} + \vec{e_3}) \overset{\text{lin. } j}{=} (j(\vec{e_1}; \vec{e_2}) + j(\vec{e_1}; \vec{e_3})) \cdot (\vec{e_2} + e_3)$$
$$= (\lambda_{12}\vec{e_3} + \lambda_{13}\vec{e_2}) \cdot (\vec{e_2} + \vec{e_3}) \overset{\text{distr.}}{=} \lambda_{12}\underbrace{\vec{e_3} \cdot \vec{e_2}}_{=0} + \lambda_{12}\underbrace{\vec{e_3} \cdot \vec{e_3}}_{=1} + \lambda_{13}\underbrace{\vec{e_2}\vec{e_2}}_{=1} + \lambda_{13}\underbrace{\vec{e_2}\vec{e_3}}_{=0}$$
$$= \lambda_{12} + \lambda_{13} = 0$$

d'où $\lambda = \lambda_{12} = -\lambda_{13}$. De même $\lambda_{23} = \lambda_{12}$.

Nous en déduisons donc par bilinéarité que

$$j\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = j(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \ ; \ y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) =$$

$$x_1y_1\underbrace{j(\vec{e}_1;\vec{e}_1)}_{=0} + x_1y_2\underbrace{j(\vec{e}_1;\vec{e}_2)}_{\lambda\vec{e}_3} + x_1y_3\underbrace{j(\vec{e}_1;\vec{e}_3)}_{-\lambda\vec{e}_2} + x_2y_1\underbrace{j(\vec{e}_2;\vec{e}_1)}_{-\lambda\vec{e}_3} + \ldots\ldots$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

□

Pour terminer, nous devons encore montrer que le produit vectoriel vérifie les deux conditions imposées, c'est-à-dire la bilinéarité et l'invariance par mouvements.
La bilinéarité se vérifie facilement. Le théorème qui suit affirme l'invariance par mouvements.

Théorème 2.5. *Le produit vectoriel est invariant par mouvement : pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tout mouvement g_t, on a* $g_t(\vec{u}) \wedge g_t(\vec{v}) = g_t(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'égalité est vraie pour toute isométrie directe g puisque la proposition 1.6 de la section précédente nous assure que g_t est directe pour tout t.
Nous pouvons aussi supposer que g fixe l'origine puisqu'une translation n'affecte pas les vecteurs et que le produit vectoriel se calcule précisément sur des vecteurs.
Nous sommes ainsi ramenés au cas où l'isométrie est une rotation. .

Au début de ce module, nous avons vu que le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur

de direction orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

de sens positif, c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}; \vec{u}\wedge\vec{v}) \geq 0$

de norme $\sigma(\vec{u}; \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\alpha$ où α est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ces propriétés sont conservées par rotation.

Ainsi, pour toute rotation g, $g(\vec{u}) \wedge g(\vec{v}) = g(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

□