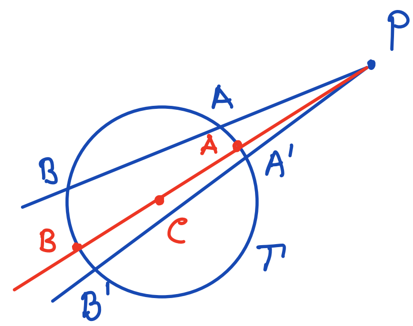
3 La polaire

On se donne un cercle Γ, de centre $C = (\alpha; \beta)$ et de rayon r, et un point $P = (a; b)$ du plan. Le théorème du produit constant nous dit que le produit

$\|\overrightarrow{PA}\| \cdot \|\overrightarrow{PB}\|$ ne dépend pas du choix de la droite issue de P qui coupe Γ en A et B.



Or, avec la droite PC,

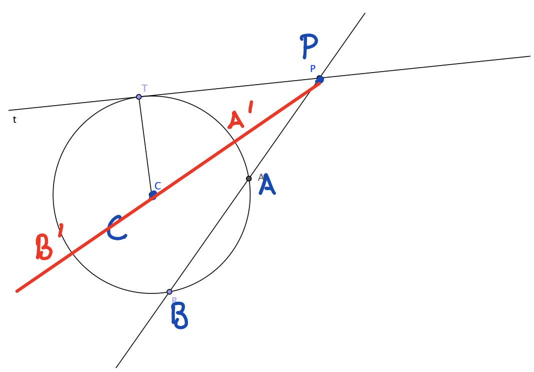
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \|\overrightarrow{PA}\| \cdot \|\overrightarrow{PB}\| \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}$$

Définition 3.1. On appelle *puissance* du point P relativement au cercle Γ le produit scalaire constant $p(P; \Gamma) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.

Proposition 3.2. *Soit Γ un cercle de centre $C = (\alpha; \beta)$ et $P = (a; b)$ un point du plan. Alors*

$$p(P; \Gamma) = ||\overrightarrow{CP}||^2 - r^2 = (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 - r^2 = ||\overrightarrow{PT}||^2,$$

où T désigne le point de contact d'une tangente au cercle passant par P. La dernière égalité n'est valide que si P est extérieur au cercle.



Démonstration. La première et la deuxième égalités sont obtenues en calculant la puissance avec la droite PC qui coupe Γ en A' et B'

$$p(P; \Gamma) = \|\overrightarrow{PA'}\| \cdot \|\overrightarrow{PB'}\| = (\|\overrightarrow{PC}\| - r)(\|\overrightarrow{PC}\| + r) = \|\overrightarrow{PC}\|^2 - r^2$$

La dernière égalité s'obtient en calculant la puissance avec une des tangentes à Γ issue de P : $p(P, \Gamma) = \|\overrightarrow{PT}\|^2$.

□

Définition 3.3. Soit Γ un cercle de centre C et de rayon r et P un point du plan distinct de C. La *polaire* de P relativement à Γ est le lieu géométrique des points M vérifiant la relation

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = r^2.$$

Si le cercle est donné par son équation canonique cartésienne comme ci-dessus et $P = (a; b)$, alors l'équation des points $(x; y)$ de la polaire p de P relativement à Γ est

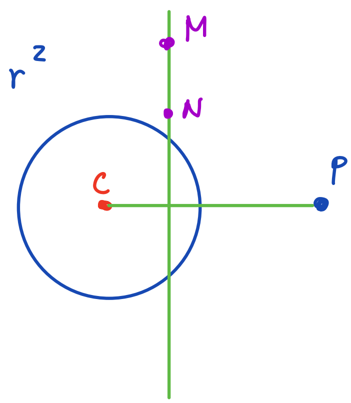
$$p \ : \ (a - \alpha)(x - \alpha) + (b - \beta)(y - \beta) - r^2 = 0.$$

C'est la même équation que celle de la tangente en un point du cercle ! On en déduit deux informations. La première, c'est que la polaire est une droite, la seconde que la notion de polaire généralise celle de tangente.

Proposition 3.4.
La polaire d'un point P relativement à un cercle Γ est une droite perpendiculaire au diamètre de Γ passant par P.

Démonstration. Soit M un point de la polaire et $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite CP.
Si N est un point obtenu comme $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \lambda\vec{n}$, on a

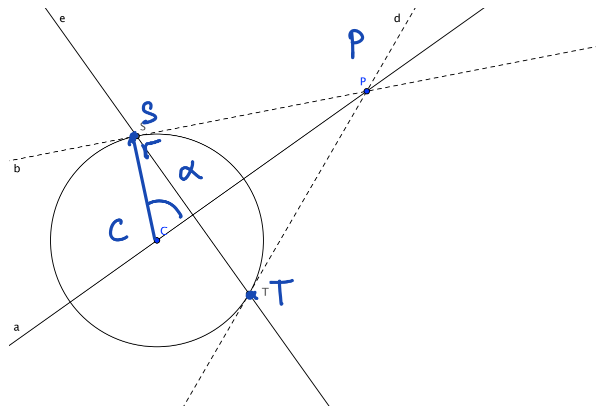
$$\vec{CP} \cdot \vec{CN} = \vec{CP}\left(\vec{CM} + \underbrace{\vec{MN}}_{\lambda\vec{n}}\right) = \vec{CP} \cdot \vec{CM} + \underbrace{\vec{CP} \cdot \lambda\vec{n}}_{=0} = r^2$$



□

Exemple 3.5. Lorsque le point P est à l'extérieur du cercle, considérons les points de tangence S et T des tangentes au cercle passant par P.

La polaire est donc la droite passant par S et T.



$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CS} =$$
$$\|\overrightarrow{CP}\|\|\overrightarrow{CS}\|\cos\alpha =$$
$$\cancel{\|\overrightarrow{CP}\|}\cdot\|\overrightarrow{CS}\|\cdot\frac{\|\overrightarrow{CS}\|}{\cancel{\|\overrightarrow{CP}\|}} = r^2$$

Lorsque le point P est à intérieur du cercle nous devons utiliser le théorème suivant pour construire sa polaire.

Théorème 3.6. de réciprocité. *Soient p et q les polaires de deux points P et Q relativement au même cercle. Alors $P \in q$ si et seulement si $Q \in p$.*

Démonstration. Si P appartient à la polaire de Q alors $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CP} = r^2$, qui est équivalent à $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ} = r^2$. Donc Q appartient à la polaire de P. □