Corrigé Pre Test 6 - Géométrie 2024

Exercice 1. *(2 + 2 + 6 + 5 + 2 = 17 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère une pyramide $ABCDS$ de volume 2, avec

$$A(1\,;0\,;-2),\quad B(2\,;-1\,;0),\quad C(1\,;-2\,;2)\ \text{ et }\ D(0\,;-1\,;0)$$

a) Vérifier que la base $ABCD$ de la pyramide forme un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \quad \text{ou alors} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}.$$

b) Calculer l'angle en A de la base $ABCD$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -1 + 1 + 4 = 4 = \| \overrightarrow{AB} \| \cdot \| \overrightarrow{AD} \| \cdot \cos\alpha = 6\cos\alpha$

Ainsi, $\cos\alpha = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ d'où $\alpha \simeq 48.18° \simeq 0.841$ rad.

c) Déterminer la hauteur de la pyramide $ABCDS$.

L'aire de la base vaut $b = \| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \|$, $V = 2 = \dfrac{1}{3}\, b \cdot h$ d'où $h = \dfrac{6}{\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \|}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & 1 & -1 \\ \vec{e_2} & -1 & -1 \\ \vec{e_3} & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \| = \sqrt{0 + 16 + 4} = 2\sqrt{5} \simeq 4.472136 \text{ d'où } h = \frac{6}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \simeq 1.34164.$$

Pour calculer $\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \|$, on peut aussi utiliser la formule $\| \overrightarrow{AB} \| \cdot \| \overrightarrow{AD} \| \cdot \sin\alpha$:

On a $\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{AD} \| = \sqrt{6}$ et $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \overset{\text{b)}}{=} \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Ainsi, on obtient $\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{6\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$ comme précédemment.

d) Déterminer les coordonnées du sommet S sachant qu'il est situé sur l'axe Oz.

$S(0,0,z)$. $V = \dfrac{1}{3}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})\right| = 2.$ $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ z+2 \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\,(z+2)$$

Ainsi, $V = \dfrac{1}{3}\,|-2\,(z+2)| = 2 \;\Leftrightarrow\; z + 2 = \pm 3 \;\Leftrightarrow\; z = 1$ ou $z = -5$.

Il y a deux possibilités : $S_1(0,0,1)$ et $S_2(0,0,-5)$.

e) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\vec{e}_1$ sont coplanaires.

Ils sont coplanaires car $\left[\vec{e_1}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 0.$

Exercice 2. *(9 (3+3+3) + 3 = 12 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(-1\,;\,1\,;\,4),\qquad B(2\,;\,2\,;\,3),\qquad C(1\,;\,4\,;\,4)\qquad \text{et}\qquad D(4\,;\,0\,;\,-1).$$

a) Déterminer les coordonnées du point E équidistant des points B et D et appartenant à la hauteur h_D issue de D du tétraèdre $ABCD$.

Plan médian de BD : $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $M(3;1;1)$

$\Rightarrow \ \mu_{BD} \ : \ x - y - 2z = 0.$

$$\overrightarrow{h_D} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

d'où $h_D : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

$h_D \cap \mu_{BD} \ : \ 4 + 3k + 2k + 2 - 14k = 0 \ \Leftrightarrow \ 6 = 9k \ \Leftrightarrow \ k = \dfrac{2}{3}$ d'où $E\left(6; -\dfrac{4}{3}; \dfrac{11}{3}\right)$

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\,|15 + 2 - 35| = \frac{18}{6} = 3.$$

Exercice 3. *(2 + 2 + 3 = 7 points)*

Le grillage ci-dessous est une vue de face d'un plan α perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, qui pointe en direction de l'observateur.

Le vecteur $\vec{b}$ se situe dans le plan α.

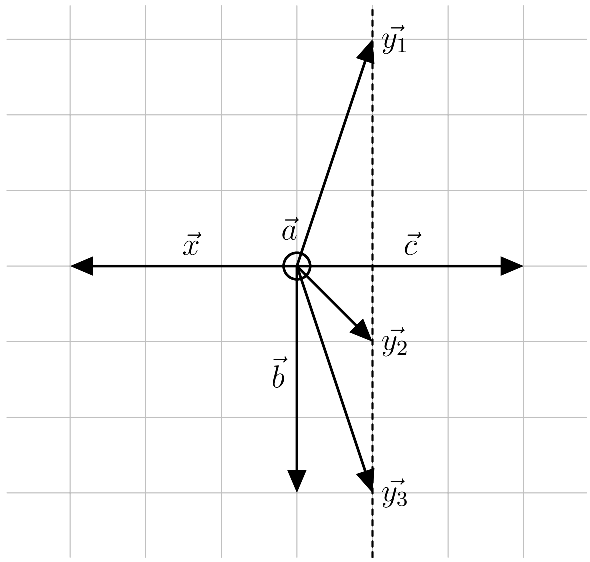
De plus, $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{b}\| = 3$.

Représenter graphiquement

i) le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

ii) un vecteur $\vec{x}$ du plan α, tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$; s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ et $\vec{x_3}$;

iii) un vecteur $\vec{y}$ du plan α, tel que $\vec{b} \times \vec{y} = \vec{a}$; s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{y_1}, \vec{y_2}$ et $\vec{y_3}$;



Exercice 4. *(3 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 10 points)*

Dans un repère orthonormé, on donne les droites a et b par leurs équations paramétriques

$$a\ :\ \begin{cases} x = -8-6k \\ y = \ \ 7+4k \\ z = \ \ 5+3k \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b\ :\ \begin{cases} x = \quad\ \ n \\ y = -5+4n \\ z = \ \ 1+2n \end{cases}$$

Les deux extrémités A et B d'un segment parallèle au plan Oxz et de longueur 5 sont situées respectivement sur les droites a et b.

Déterminer les coordonnées des points A et B.

$$\left.\begin{array}{l} A(-8-6k\ ; 7+4k\ ; 5+3k) \\ B(n\ ; -5+4n;\ 1+2n) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} n+6k+8 \\ 4n-4k-12 \\ 2n-3k-4 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ parallèle à $Oxz \ \Leftrightarrow\ 4n-4k-12=0 \ \Leftrightarrow\ n=k+3$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7k+11 \\ 0 \\ -k+2 \end{pmatrix}$

$\| \overrightarrow{AB} \|^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ (7k+11)^2 + (-k+2)^2 = 25 \ \Leftrightarrow\ 50k^2 + 150k + 100 = 0$

$\Leftrightarrow\ k^2+3k+2=0 \ \Leftrightarrow\ (k+1)(k+2)=0$

Il y a deux solutions :

$k=-1 \ \Rightarrow\ n=2 \ \Rightarrow\ A_1(-2;3;2)$ et $B_1(2;3;5)$

$k=-2 \ \Rightarrow\ n=1 \ \Rightarrow\ A_1(4;-1;-1)$ et $B_2(1;-1;3)$

Exercice 5. *(2 + 4 = 6 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$, on donne la sphère Σ par l'équation

$$\Sigma:\ x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+10=0$$

Déterminer le centre C et le rayon r du cercle γ d'intersection de Σ avec le plan Oxy.

On détermine d'abord le centre C_1 et le rayon r_1 de la sphère Σ :

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2+10-4-9-1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$

Ainsi, $\boxed{C_1(2;-3;1) \text{ et } r_1=2}$.

Pour déterminer la suite, voici deux méthodes :

Méthode 1 : On construit la droite p perpendiculaire au plan passant par C_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le centre C se trouve à l'intersection du plan Oxy et de la droite p.

Comme $z=0$, on obtient $1+m=0 \Rightarrow m=-1$, donc $\boxed{C(2;-3;0)}$.

Pour déterminer le rayon, on utilise Pythagore dans le triangle C_1CP avec P un point sur la sphère et sur le cercle. Comme $\overrightarrow{C_1C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$r = \sqrt{r_1^2 - ||\overrightarrow{C_1C}||^2} = \sqrt{4-1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

Méthode 2 : On se place dans le plan Oxy et on travaille en deux dimensions :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + 10 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$$

Le centre cherché est donc $\boxed{C(2;-3;0)}$ et le rayon est $\boxed{r = \sqrt{3}}$.

Exercice 6. *(2 + 8 + 3 + 5 = 18 points)*

On considère la conique d'équation $\quad 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 28 = 0.$

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 3 \cdot 3 = -8 < 0$, donc c'est une ellipse.

b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le double produit xy, en explicitant les différentes étapes.
On cherche les valeurs propres puis les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)(4-\lambda)$ d'où les valeurs propres 2 et 4.
On calcule facilement que $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et en normalisant les vecteurs propres, on pose $\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui forment bien une base orthonormée.
On obtient alors le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$.
En remplaçant dans l'équation de base et en simplifiant, il vient

$$2u^2 + 4v^2 - 16u + 8v + 28 = 0.$$

c) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle X et Y) pour amener l'équation de la conique sous forme canonique.
On complète les carrés :
$2u^2 - 16u = 2(u^2 - 8u) = 2(u-4)^2 - 2 \cdot 16$ et $4v^4 - 16v = 4(v^2 + 2v) = 4(v+1)^2 - 4 \cdot 1$.
On pose alors $X = u - 4$ et $Y = v + 1$.
On remplace dans l'équation et on simplifie pour obtenir l'équation $2X^2 + 4Y^2 = 8$.
On a donc l'équation canonique $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1$, qui est bien l'équation d'une ellipse.

d) Déterminer la longueur des axes et l'excentricité de la conique.
Calculer son centre dans les coordonnées originales $(x;y)$.

La longueur du grand axe $2a = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$ et celle du petit axe $2b = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Ainsi, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Avec les coordonnées $(X;Y)$, l'ellipse est centrée en $(0;0)$.
En effectuant les changements de coordonnées à l'envers, on trouve le centre $(4;-1)$ dans les coordonnées $(u;v)$ puis finalement le centre $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans les coordonnées $(x;y)$.