Pre Test 6 - Géométrie 2024

Le pretest dure 90 minutes. Le détail des calculs doit être rédigé de manière claire.

Exercice 1. *(17 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère une pyramide $ABCDS$ de volume 2, avec

$$A(1\,;0\,;-2),\quad B(2\,;-1\,;0),\quad C(1\,;-2\,;2)\ \text{ et }\ D(0\,;-1\,;0)$$

a) Vérifier que la base $ABCD$ de la pyramide forme un parallélogramme.

b) Calculer l'angle en A de la base $ABCD$.

c) Déterminer la hauteur de la pyramide $ABCDS$.

d) Déterminer les coordonnées du sommet S sachant qu'il est situé sur l'axe Oz.

e) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\vec{e}_1$ sont coplanaires.

Exercice 2. *(12 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(-1\,;1\,;4),\qquad B(2\,;2\,;3),\qquad C(1\,;4\,;4)\qquad \text{et} \qquad D(4\,;0\,;-1).$$

a) Déterminer les coordonnées du point E équidistant des points B et D et appartenant à la hauteur h_D issue de D du tétraèdre $ABCD$.

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3. *(7 points)*

Le grillage ci-dessous est une vue de face d'un plan α perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, qui pointe en direction de l'observateur.

Le vecteur $\vec{b}$ se situe dans le plan α.

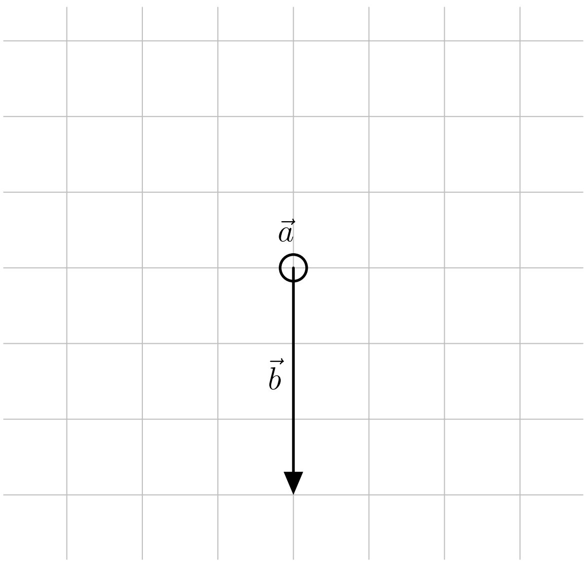
De plus, $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{b}\| = 3$.

Représenter graphiquement

i) le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

ii) un vecteur $\vec{x}$ du plan α, tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$; s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ et $\vec{x_3}$;

iii) un vecteur $\vec{y}$ du plan α, tel que $\vec{b} \times \vec{y} = \vec{a}$; s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{y_1}, \vec{y_2}$ et $\vec{y_3}$;



Exercice 4. *(10 points)*

Dans un repère orthonormé, on donne les droites a et b par leurs équations paramétriques

$$a\ :\ \left\{\begin{array}{rl} x = & -8-6k \\ y = & 7+4k \\ z = & 5+3k \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad b\ :\ \left\{\begin{array}{rl} x = & n \\ y = & -5+4n \\ z = & 1+2n \end{array}\right.$$

Les deux extrémités A et B d'un segment parallèle au plan Oxz et de longueur 5 sont situées respectivement sur les droites a et b.
Déterminer les coordonnées des points A et B.

Exercice 5. *(6 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$, on donne la sphère Σ par l'équation

$$\Sigma :\ x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+10=0$$

Déterminer le centre C et le rayon r du cercle γ d'intersection de Σ avec le plan Oxy.

Exercice 6. *(18 points)*

On considère la conique d'équation $\qquad 3x^2-2xy+3y^2-12\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y+28=0.$

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !

b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le double produit xy, en explicitant les différentes étapes.

c) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle X et Y) pour amener l'équation de la conique sous forme canonique.

d) Déterminer la longueur des axes et l'excentricité de la conique.
Calculer son centre dans les coordonnées originales $(x; y)$.