Corrigé série 29

Exercice 1. On considère la conique d'équation

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 10x + 4 = 0.$$

On va voir que cette équation décrit une ellipse. On procède comme dans l'Exemple 2.3 des notes "Les Sections Coniques". La matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ admet 9 (et 4) comme valeurs propres. Un vecteur donc possible est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc on choisit la base orthonormée $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Effectuons donc le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{2}{\sqrt{5}}v$ et $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v$. Alors, l'équation de la conique devient

$$9u^2 - 2\sqrt{5}u + 4v^2 - 4\sqrt{5}v + 4 = 0,$$

ou bien, en complétant le carré,

$$9\left(u - \frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2 + 4\left(v - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse.
Remarque : L'équation obtenue dépend du choix des vecteurs propres choisis.
Le changement de variables $X = u - \frac{\sqrt{5}}{9}$ et $Y = v - \frac{\sqrt{5}}{2}$ place l'ellipse à l'origine pour que le grand axe et l'axe court soient vertical et horizontal, respectivement. On obtient l'équation

$$9X^2 + 4Y^2 = \frac{14}{9}$$

ou encore sous forme canonique :

$$\frac{X^2}{\frac{14}{81}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{18}} = 1$$

On voit que les demi-axes sont de longueur $a = \sqrt{\frac{14}{81}}$ et $b = \sqrt{\frac{7}{18}}$. (C'est vrai dans les coordonnées uv et dans les coordonnées xy, comme on a obtenu les coordonnées uv par une transformation linéaire *orthogonale*.)
De plus, cette ellipse est centrée en $(0; 0)$ dans les coordonnées XY. En faisant le changement de

variables inverse, on trouve qu'elle est centrée en $(U,V) = \left(\frac{\sqrt{5}}{9}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ dans les coordonnées uv.
Ainsi, dans les coordonnées xy originales, l'ellipse est centrée en $(X,Y) = \left(\frac{10}{9}, \frac{5}{18}\right)$.
Dans les coordonnées (X,Y), les foyers sont $(0, \pm\sqrt{b^2-a^2}) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{35}{162}}\right)$ car $c = \sqrt{\frac{35}{162}}$.
En utilisant les relations entre X, Y, u, v, x, y, on peut trouver les foyers dans les coordonnées xy, qui sont

$$\left(\frac{10}{9} \pm \frac{\sqrt{14}}{9}, \frac{5}{18} \pm \frac{\sqrt{14}}{18}\right).$$

Exercice 2. On procède exactement comme dans l'Exercice 1. On considère la conique d'équation

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$ admet comme valeurs propres 16 (et -4). On choisit par exemple les vecteurs propres (normalisés) $\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Donc, le changement de variables $x = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v$ et $y = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v$ place un axe de l'ellipse horizontalement. Dans les coordonnées uv, l'équation de la conique devient

$$4u^2 - v^2 + 4 = 0,$$

ou bien

$$\frac{v^2}{4} - u^2 = 1.$$

Dans cette forme, il est clair que la conique est une hyperbole. (Alternativement, on peut déduire ça du discriminant de l'équation en termes de xy.) Évidemment, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{5}$. De plus, l'hyperbole est centrée en l'origine en termes de uv.

On peut calculer que, en termes de xy, le centre est en $(0,0)$; les foyers se trouvent en $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; les sommets se trouvent en $(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$.

Exercice 3. Effectuons le changement de variables suivant : $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$, $v = x$, $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$. Note en particulier que u, v sont orthogonaux et de longueur 1. L'intersection du cylindre $x^2+y^2 = 1$ et du plan $y = z$ est contenu dans le plan uv. Dans le plan uv, il est trivial que $w = y - z = 0$. Donc,

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z + (y - z)) = \sqrt{2}y,$$

et l'équation de cette intersection en termes de u, v devient

$$1 = x^2 + y^2 = v^2 + \frac{u^2}{2}.$$

Ainsi, $\{(x,y,z) : x^2+y^2=1\} \cap \{(x,y,z) : y = z\}$ est une ellipse.
Le centre se trouve évidemment en $(x,y,z) = (0,0,0)$. Dans les coordonnées u, v, w, les sommets se trouvent en

$$(u,v,w) \in \{(\pm\sqrt{2},0,0),(0,\pm 1,0)\}.$$

Dans les coordonnées originales x, y, z, on trouve que les sommets se trouvent en

$$(x,y,z) \in \{(\pm 1,0,0),(0,1,1),(0,-1,-1)\}.$$

De plus, les foyers en termes de u, v, w se trouvent en

$$(u,v,w) \in \{(\pm 1,0,0)\}.$$

Par conséquent, les foyers en termes de x, y, z se trouvent en

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Exercice 4.

a) **Vrai.** C'est exactement comment on définit une conique : l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution !

b) **Faux.** Il est facile de voir que l'intersection d'un plan et d'une sphère peut être un cercle.

c) **Faux.** Prends la ligne $x = y$ et tourne-la autour de l'axe Oz . Alors, l'intersection d'un plan vertical et de ce "cône de révolution" est une ligne.

d) **Vrai.** Regarde le discriminant Δ, qui est plus grand que 0.

e) **Faux.** Cette équation décrit deux lignes parallèles.

f) **Faux.** Il n'y a qu'un foyer, $(0,0)$, comme cette ellipse est en fait un cercle.

Exercice 5.

a) On calcule que $\Delta < 0$, donc c'est une ellipse. Comme il n'y a pas de termes en xy, on peut directement compléter les carrés :

$$16(x-2)^2+25(y+3)^2-64-225-111 = 0 \Leftrightarrow 16(x-2)^2+25(y+3)^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Cette équation décrit une ellipse centrée en $(2,-3)$. Les foyers sont $(-1,-3)$ et $(5,-3)$. Le demi-axe vertical est de longueur 4 ; le demi-axe horizontal est de longueur 5.

b) On calcule que $\Delta < 0$, donc c'est une ellipse. On a

$$5(x-5)^2+(y+4)^2-125-64+121=0 \Leftrightarrow 5(x-5)^2+(y+4)^2=20 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{20}=1.$$

Cette équation décrit une ellipse centrée en $(5,-4)$. Les foyers se trouvent en $(5,-8)$ et $(5,0)$. Le demi-axe vertical est de longueur $2\sqrt{5}$; le demi-axe horizontal est de longueur 2.

c) On calcule que $\Delta > 0$, donc c'est une hyperbole. On a

$$9(x-3)^2-16(y+4)^2-81+256-319=0 \Leftrightarrow 9(x-3)^2-16(y+4)^2=144 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{9}=1.$$

C'est une hyperbole dont les sommets sont $(-1,-4)$ et $(7,-4)$. Les foyers se trouvent en $(-2,-4)$ et $(8,-4)$. Le demi-axe horizontal est de longueur 4 ; le demi-axe vertical est de longueur 3.

d) On a

$$4(x-3)^2-9(y+4)^2-36+144-108=0 \Leftrightarrow 4(x-3)^2-9(y+4)^2=0 \Leftrightarrow 3(y+4)=\pm 2(x-3).$$

Cette équation décrit la réunion des lignes $y=\frac{2}{3}x-6$ et $y=-\frac{2}{3}x-2$.

e) Cette équation décrit une parabole dont le sommet est $(-1,-3)$. Le foyer se trouve en $\left(-1,-\frac{45}{16}\right)$, donc le demi-axe vertical est de longueur $\dfrac{3}{16}$ et la directrice est $y=-\dfrac{51}{16}$.

f) Cette équation se factorise comme $(x+3)(x-2)=0$. Donc, l'espace de solutions est la réunion des lignes $x=-3$ et $x=2$.

Exercice 6.

a) Si $x=0$, alors $y^2-z^2=1$. Cette équation décrit une hyperbole avec sommets $(y,z)=(\pm 1,0)$, asymptotes $y=\pm z$, et foyers $(\pm\sqrt{2},0)$.

b) Si $x=1$, on a $y^2=z^2$. Cette équation décrit les lignes $y=z$ et $y=-z$.

c) Si $z=h$, alors $x^2+y^2=1+h^2$, ce qui décrit un cercle centré en $(x,y)=(0,0)$ avec rayon $\sqrt{1+h^2}$.

Exercice 7. On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Évidemment, $a=2\sqrt{5}$ et $b=2$. Les foyers se trouvent en $(\pm 4,0)$. Donc, la longueur d'une diagonale d'un tel rectangle est 8. On doit trouver des points $A=(x,y)$ et $B=(-x,-y)$ dans l'ellipse tels que la distance entre A et B soit 8. En d'autres termes,

$$8=\sqrt{(x-(-x))^2+(y-(-y))^2},$$

ou bien,

$$64 = 4x^2 + 4y^2.$$

Par conséquent, $x^2 = 16 - y^2$. Comme (x, y) est sur l'ellipse,

$$(16 - y^2) + 5y^2 = 20.$$

On trouve que $(x, y) = (\sqrt{15}; 1)$ ou $(x, y) = (-\sqrt{15}; 1)$ est sur le rectangle. On peut prendre $(x, y) = (\sqrt{15}; 1)$. Alors, un côté du rectangle a comme longueur

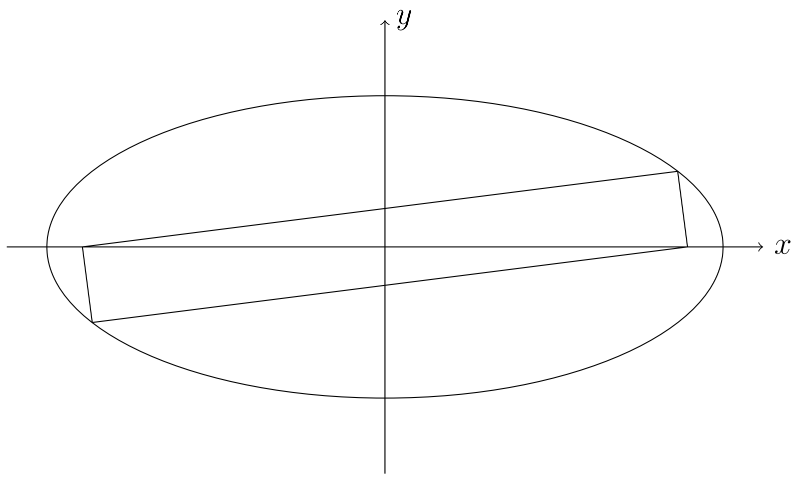
$$\sqrt{(\sqrt{15} - 4)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{32 - 8\sqrt{15}}$$

et un autre côté du rectangle a comme longueur

$$\sqrt{(\sqrt{15} + 4)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{32 + 8\sqrt{15}}.$$

L'aire du rectangle est donc

$$\sqrt{32 - 8\sqrt{15}}\sqrt{32 + 8\sqrt{15}} = \sqrt{64} = 8.$$



Exercice 8. Sous l'application $\mathrm{diag}(a, b)$, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est envoyé à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si $a, b > 0$ (dans les mêmes coordonnées que le cercle original, donc dans la même base).
Si $a = b = 0$, le cercle est envoyé à un point.
Si $a = 0, b > 0$, le cercle est envoyé sur le segment vertical $\{(0, y) : |y| \leq b\}$.
Si $a > 0, b = 0$, le cercle est envoyé sur le segment horizontal $\{(x, 0) : |x| \leq a\}$.

Exercice 9. Par symétrie, on peut supposer que $c > 0$ (si $c = 0$, la question n'est pas bien définie). Soit $C = (x, y)$. Si $y = 0$, la condition est satisfaite pour tout C.

Maintenant, supposons que $y \neq 0$. Si la condition $\sin\alpha = \tan\beta$ est satisfaite, il faut que $x \neq c$. En utilisant les définitions de sin et tan, on trouve que

$$\frac{y}{\sqrt{(c+x)^2 + y^2}} = \frac{y}{c-x}.$$

On trouve facilement que

$$x = -\frac{1}{4c}y^2.$$

C'est une parabole qui est ouverte à gauche si $c > 0$ et à droite si $c < 0$.
Le foyer se trouve en $(-c, 0)$. Le sommet se trouve en $(0, 0)$.