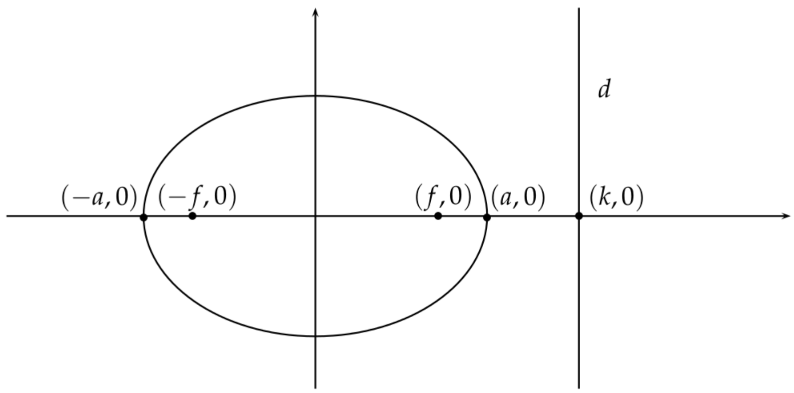
Corrigé série 28

Exercice 1. (5 points)



Soit une ellipse centrée en $(0,0)$ avec grand-axe le long de Ox. Appelons $F=(f,0)$ son foyer, e son excentricité, d sa droite directrice (caractérisée par l'équation $x=k$), a son demi-grand axe et c la demi-distance entre les foyers.

On a $a=150$ et $e=\dfrac{1}{60}$, donc $c=e\cdot a=\dfrac{5}{2}$.

On peut donc calculer la distance *maximale* entre le Soleil et la Terre[1]

$$a+c=\frac{305}{2}$$

et la distance *minimale*

$$a-c=\frac{295}{2}.$$

La distance entre le deux foyers est

$$2c=2ea=5.$$

1. Si on suppose que le Soleil est réduit à un point...

Exercice 2. (10 points)

On peut transformer la première équation en

$$\frac{(x-6)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{4^2} = 1.$$

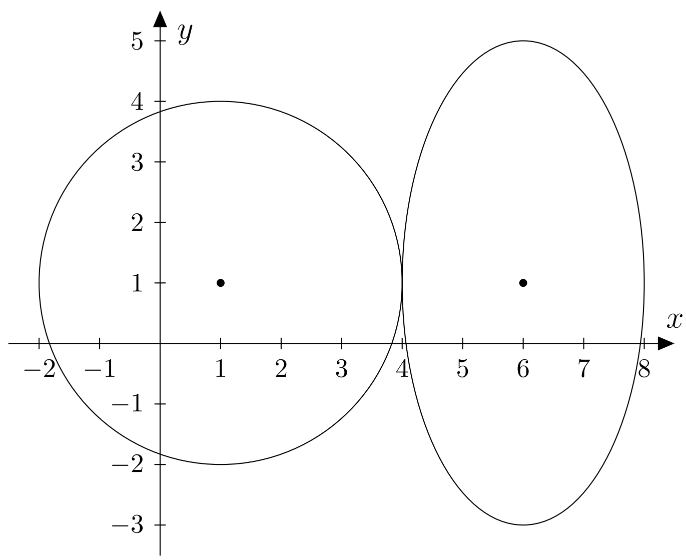
Il s'agit d'une ellipse avec ses deux foyers sur la droite

$$x = 6.$$

La deuxième équation peut être transformée en

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Il s'agit d'un cercle.



En utilisant les propriétés de l'ellipse et du cercle (cf figure), on trouve que leur unique intersection est au point $(4;1)$.

Exercice 3. (5 points)

On transforme l'équation en

$$x^2 + \frac{y^2}{5^2} = 1,$$

il s'agit d'une ellipse de centre $(0,0)$ et de sommets $(0,\pm 5)$.
Pour calculer les foyers, on utilise la proposition 3.3. On commence par calculer

$$c = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}.$$

Les foyers sont donc $(0, \pm\sqrt{24})$.

Exercice 4. (10 points)

On commence par transformer l'équation en

$$\frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x-4)^2}{2^2} = 1,$$

il s'agit donc d'une hyperbole avec ses deux foyers le long de la courbe d'équation $x = 4$, et de centre $(4, 1)$.

On utilise la théorie du cours sur l'hyperbole pour avoir

$$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{4}{9} + 1}.$$

De plus, on a $\delta(S, S') = 2 \cdot a = 6$. Ainsi les coordonnées des deux sommets sont

$$(4, 4) \quad \text{et} \quad (4, -2).$$

Enfin, on a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$,qui est la demi-distance entre les deux foyers. Ainsi, on trouve que les foyers sont en

$$(4, 1 + \sqrt{13}) \quad \text{et} \quad (4, 1 - \sqrt{13})$$

Exercice 5. (10 points)

Première partie : Comme on sait que la distance entre la directrice et le sommet est égale à la distance entre la foyer et le sommet, et comme le foyer est sur la perpendiculaire à la directrice passant par le sommet, on a

$$F = (5, 1).$$

Ce qui nous donne l'équation de la parabole

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = (y+5)^2,$$

ou encore

$$(x-5)^2 = 12(y+2).$$

Deuxième partie : On commence par déduire que l'équation de la directrice est

$$y = -3.$$

Ainsi, l'équation de la parabole est

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = (y+3)^2,$$

ou encore

$$(x-3)^2 = 16(y-1).$$

Exercice 6. $(3+2+3+3+1=12$ points $)$

a) **Vrai.** Nous allons utiliser la définition de l'ellipse comme l'ensemble des points P tels que

$$\delta(P,F)=e\delta(P,d),$$

où $0<e<1$.

Considérons les deux sommets du grand axe de l'ellipse. Pour e tendant vers 1, l'un de ces deux sommets va tendre vers le point milieu du segment de F à sa projection $\widehat{F}$ sur la directrice d, tandis que l'autre point, devant se situer approximativement à la même distance de F que de $\widehat{F}$, n'aura pas d'autre solution que de "partir" vers l'une des extrémités de la droite $(F,\widehat{F})$.

À terme, pour e valant 1, l'ellipse se trouve être précisément le lieu des points équidistants de F et de d, ce qui est la définition d'une parabole.

b) **Faux.** À nouveau, en considérant les deux sommets du grand axe, on voit que si l'excentricité e tend vers 0, alors ces deux points vont converger vers le foyer F de l'ellipse. Ainsi, à la limite, toute l'ellipse collapse sur le foyer F.

c) **Faux.** Considérons une ellipse centrée en $(0,0)$ avec son grand axe le long de Ox.

Le point $P=(0,b)$ de l'ellipse doit satisfaire l'équation

$$\delta(P,F)+\delta(P,F')=2a.$$

Or, $\delta(P,F)=\delta(P,F')$. On a donc

$$\delta(P,F)=a.$$

Si $F=(0,f)$, cela devient

$$f^2+b^2=a^2,$$

et la condition $f\to a$ implique alors $b\to 0$. L'ellipse va donc tendre vers un segment.

d) **Vrai.** Soit P un point de l'ellipse, on a

$$\delta(P,F)+\delta(P,F')=2a.$$

De plus, en utilisant les inégalités triangulaires

$$\delta(F,P)-\delta(F,F')\leq\delta(F',P)\leq\delta(F,P)+\delta(F,F'),$$

on obtient

$$2\delta(F,P)-\delta(F,F')\leq 2a\leq 2\delta(F,P)+\delta(F,F'),$$

et donc

$$\delta(F,P)\in[a-\varepsilon,a+\varepsilon].$$

pour un ε positif tendant vers 0 si $\delta(F,F')\to 0$.

e) **Faux.** Il existe aussi des orbites hyperboliques.

Exercice 7. (10 points) On commence par remarquer que le rapport

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 - 6x}$$

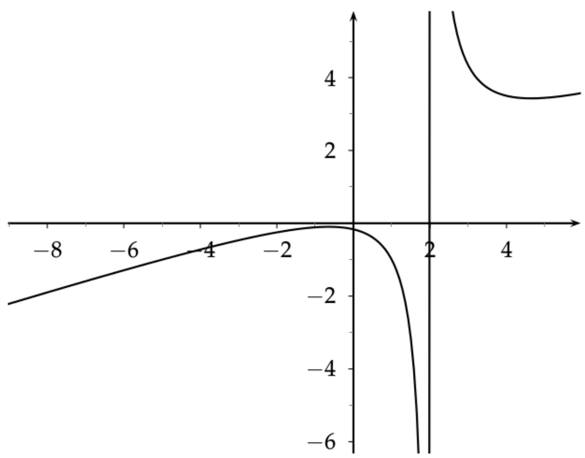
tend vers $\frac{1}{3}$ pour $x \to \pm\infty$, et que

$$f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{x^2 + x + 1}{3x - 6} - \frac{x^2 - 2x}{3x - 6} = \frac{3x + 1}{3x - 6}$$

tend vers 1 pour $x \to \pm\infty$. Cela montre la présence d'une asymptote oblique d'équation

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

pour $x \to \pm\infty$.
De plus, on trouve une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



On vérifie encore que, comme

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{3(x - 2)^2},$$

f est croissante sur $]-\infty, 2 - \sqrt{7}[\cup]2 + \sqrt{7}, \infty[$ et décroissante sur $]2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}[$.

Ces considérations et le graphe tracé suggèrent que f est une hyperbole. Evidemment, il faudrait le prouver, ce qui est plus compliqué...

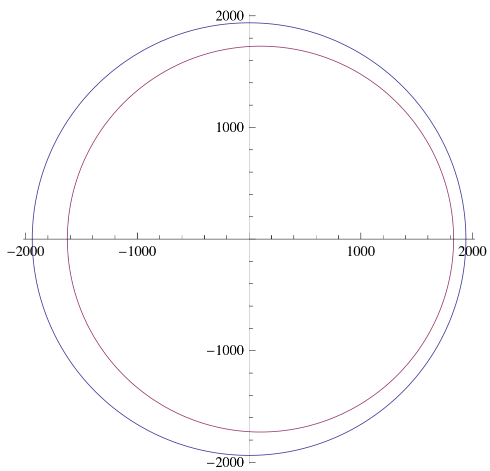
Exercice 8. (3 petits pois et une carotte) Par la théorie décrite au début des notes de cours, on sait qu'il s'agit d'une parabole.

Exercice 9. (5 points) On a

$$\begin{aligned} a &= \frac{110 + 2 \cdot 1728 + 314}{2} = 1940, \\ c &= a - (110 + 1728) = 102, \\ e &= \frac{c}{a} = \frac{51}{970}. \end{aligned}$$

De $1 - e^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$, on trouve $b = 2\sqrt{938299}$.

L'équation de l'ellipse sera donc $\dfrac{x^2}{3763600} + \dfrac{y^2}{3753196} = 1$. L'orbite est presque circulaire !



Exercice 10. (3 + 3 + 2 + 2 = 10 points)

a) On remarque que les triangles $\Delta(PF''Q)$ et $\Delta(PF'Q)$ sont égaux. Ainsi, $\delta(Q, G) = \delta(Q, F') = \delta(Q, F'')$, ce qui implique que le triangle $\Delta(QF''G)$ est isocèle en Q. Dès lors, il est impossible que $\sphericalangle GF''F$ soit égal à $\sphericalangle F''GF$, comme $\sphericalangle QF''G = \sphericalangle QGF''$.
Ainsi, $\Delta(FF''G)$ n'est pas isocèle en F.

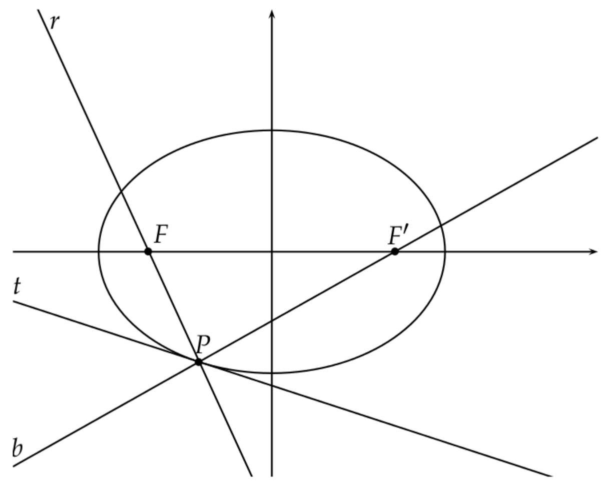
b) Supposons, par l'absurde, que Q appartienne à l'ellipse. Alors on aurait

$$\begin{aligned} \delta(FF'') &= \delta(FP) + \delta(PF'') = 2a - \delta(PF') + \delta(PF'') = 2a, \quad \text{et} \\ \delta(FG) &= \delta(FQ) + \delta(QG) = 2a - \delta(QF') + \delta(QG) = 2a, \end{aligned}$$

ce qui contredit le point précédent.

c) C'est une conséquence directe du point précédent.

d)



Soit F et F' les deux foyers d'une ellipse. Soit r une droite partant de F, nous devons montrer que sa réflexion sur l'ellipse passe par F'. Soit P l'une des intersections de r et de l'ellipse, et nommons t la tangente à l'ellipse en ce point. Enfin, appelons b la droite $(F'P)$, comme sur la figure.

On doit montrer que

$$\sphericalangle rt = \sphericalangle bt.$$

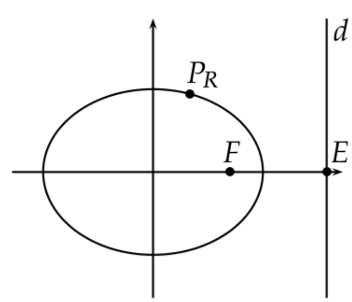
Or, cela est une conséquence des points précédents (on a vu que la tangente t est caractérisée par cette propriété).

Exercice 11. $(5 + 5 + 3 + 3 + 4 = 20$ points)

a) Supposons, que pour tout $R > 0$, il existe un point P_R de l'ellipse tel que

$$\delta(P_R, F) \geq R.$$

Soit E la projection sur d de F, comme sur la figure.



On commence par se convaincre que l'inégalité suivante a lieu :

$$\delta(P_R, F) + \delta(F, E) \geq \delta(P_R, d).$$

Ainsi,

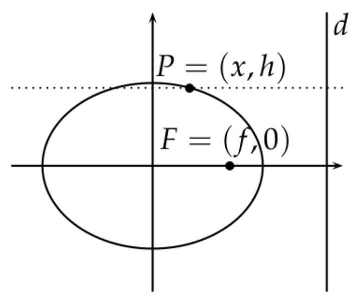
$$\frac{\delta(P_R, F) + \delta(F, E)}{\delta(P_R, F)} \geq \frac{\delta(P_R, d)}{\delta(P_R, F)} = \frac{1}{e} > 1,$$

et comme

$$\frac{\delta(P_R, F) + \delta(F, E)}{\delta(P_R, F)} \longrightarrow 1, \quad \text{si} \quad R \to \infty,$$

nous avons une contradiction.

b) L'existence d'un premier axe de symétrie sur l'orthogonale à d passant par F est immédiat. Pour trouver le deuxième axe de symétrie, considérons un point de la forme $P = (x, h)$, où x est fixé, comme sur la figure.



On sait que P doit satisfaire l'équation

$$\delta(P, F)^2 = e^2 \delta(P, d)^2,$$

ce qui revient à, en écrivant par abus de notation d pour la droite directrice et aussi d pour la distance entre cette droite directrice et Oy,

$$(x - f)^2 + h^2 = e^2 (d - x)^2.$$

En résolvant cette équation pour x, on trouve les deux solutions

$$x = \frac{de^2 - f \pm \sqrt{\Delta(h)}}{e^2 - 1},$$

où

$$\Delta(h) = d^2 e^2 - 2de^2 f + e^2 f^2 - h^2 + e^2 h^2.$$

De la résolution de l'exercice 1, nous tirons les deux équations

$$f = ae \quad \text{et} \quad \frac{a - ae}{e} + a = d.$$

Ainsi, après quelques calculs, on trouve

$$a = de$$

et donc

$$de^2 = f.$$

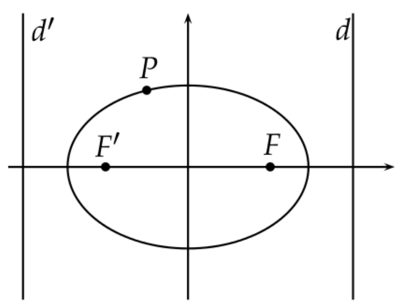
Ainsi,

$$x = \pm \frac{\sqrt{\Delta(h)}}{e^2 - 1}.$$

Ce qui montre la présence d'une axe de symétrie égale à Oy.

c) On peut construire l'axe de symétrie horizontale de l'ellipse en prenant la perpendiculaire à d passant par F. Cette perpendiculaire intersectera l'ellipse en deux sommets S et S', et on sait que l'autre axe de symétrie est équidistant de ces deux sommets et perpendiculaire au premier axe de symétrie. On peut donc faire passer une perpendiculaire au premier axe de symétrie par le milieu du segment $[S, S']$ pour avoir le deuxième axe de symétrie.

d) On utilise la symétrie de l'ellipse étudiée dans les points précédents pour avoir que, pour tout point P de l'ellipse, on a, en se référant à la figure pour les notations,



$$\delta(P, F) + \delta(P, F') = e\delta(P, d) + e\delta(P, d') = e(\delta(P, d) + \delta(P, d')) = e2d = 2(ed) = 2a.$$

e) On prétend que

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

est une paramétrisation de l'ellipse. On doit vérifier que ces points $P = (x(t), y(t))$ satisfont

$$\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a,$$

c'est-à-dire
$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}+\sqrt{(x+f)^2+y^2}=2a. \tag{1}$$
On commence par remarquer qu'en utilisant que $(0,b)$ est un point de l'ellipse, on a
$$2\sqrt{b^2+f^2}=2a,$$
et donc
$$f=\sqrt{a^2-b^2}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}(x-f)^2+y^2 &= a^2\cos^2 t-2af\cos t+(a^2-b^2)+b^2\underbrace{\sin^2 t}_{=1-\cos^2 t}\\ &= (a^2-b^2)\cos^2 t-2af\cos t+a^2\\ &= f^2\cos^2 t-2af\cos t+a^2\\ &= (f\cos t-a)^2=(a-f\cos t)^2,\end{aligned}$$
et, par un calcul similaire, on montre que
$$(x+f)^2+y^2=(a+f\cos t)^2,$$
ce qui montre que (1) est bien vérifiée par la paramétrisation proposée, comme voulu.