11.2 Equations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants (voir section 1.8)

Soit l'ED. (on pose $a_n = 1$ ici)

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q(x)$$

avec $q(x)$ continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Alors, on pose

$$\underline{y}(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))^T$$

et on obtient l'équation

$$\underline{y}' = A \underline{y} + Q.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = (0, \dots, q(x))^T.$$

ce qui est un cas particulier de l'équation linéaire générale.

$$\underline{y}' = A \underline{y} + Q(x).$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ et $Q : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Donnée une condition initiale $\underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$, la solution est toujours

$$\boxed{y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} Q(t)\, dt.}$$

ce qui est connu comme le "principe de Duhamel".

Les cas résonnants s'expliquent naturellement par l'exponentielle de blocques de Jordan (voir Algèbre linéaire). Voir série 14 A.

Vérification

i) la fonction $x \longmapsto e^{Ax}$ est differentiable comme fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$ et on a pour la derivée:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}$$

$e^{Ah} = I + Ah + \|A\|^2 h\,\varepsilon(h)$

$$= e^{Ax} A = A\, e^{Ax}$$

ii) donc (dérivation d'une intégrale avec paramètre)

$$y'(x) = A\, e^{A(x-x_0)} y_0 + e^{A(x-x)} Q(x) + \int_{x_0}^{x} A\, e^{A(x-t)} Q(t)\, dt$$

$$= A\, y(x) + Q(x).$$

Exemple $(n=2)$

$$\left.\begin{array}{l} u''(t)+u(t)=0 \qquad (*) \\ u(0)=1,\; u'(0)=0 \end{array}\right\} \text{ solution: } u(t)=\cos(t).$$

Avec la formule de Duhamel $(Q\equiv 0$ ici$)$

$$y := \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u' \\ -u \end{pmatrix} = Ay.$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$y_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le polynôme characléristique de A on a.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 \quad \text{et donc} \quad A^2 + I = 0 \iff A^2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec $B \equiv Ax$: , $B^k = A^k x^k$.

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} \underbrace{B^{2\ell}}_{\substack{\| \\ x^{2\ell}(A^2)^{\ell}}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} \underbrace{B^{2\ell+1}}_{\substack{\| \\ x^{2\ell+1}A(A^2)^{\ell}}}$$

$$= I \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ \ )!} x^{2\ell} + A \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}$$

$$= I \cdot \cos(x) + A \cdot \sin(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

La solution de notre problème est donc:

$$y(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix},$$

ou, dans les variables de départ, $u(t) = \cos(t)$

11.3. Théorème d'existence et d'unicité (suite de la section 1.10)

Référence pour ce chapitre

Ernst Hairer "Analyse II, Partie B" (1998/1999)

Soient $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(x_0, y_0) \in D$, et considérons le problème de Cauchy

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

ou d'une manière équivalente l'équation intégrale

$$y(x) = \underbrace{y_0}_{y_0(x)} + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Proposition: soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ tels que $A \subset D$, où

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, \| \underset{\in \mathbb{R}^n}{y} - \underset{\in \mathbb{R}^n}{y_0} \|_\infty \leq b \},$$

$$M = \max\{ \|f(x,y)\|_\infty : (x,y) \in A \}, \quad \alpha = \min\{ a, \frac{b}{M} \} \quad \text{et}$$

$$\Omega = \{ y \in C(I_\alpha, \mathbb{R}^n) : \|y - \underset{\substack{\| \\ y_0}}{y_0}\|_\infty \leq b \}$$

$$\sup_{x \in I_\alpha} \| y(x) - y_0(x) \|$$

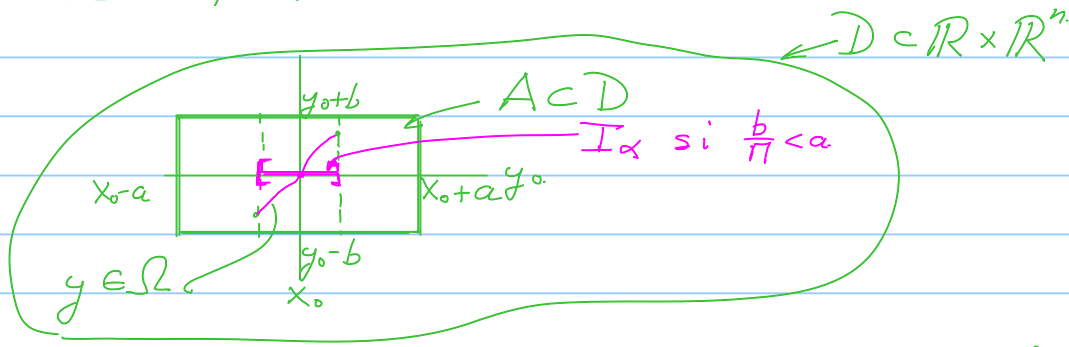
où $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Alors, la suite $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k \in \Omega$, définie par

$$y_{k+1}(x) = \underbrace{y_0}_{y_0(x)} + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\, dt.$$

est bien définie

Démonstration ("bien définie" $\iff$ $\forall k \geq 0$, $y_k \in \Omega$)

Remarque : lire le théorème



$$\Omega = \{ y \in C(I_\alpha, \mathbb{R}^n) : \forall x \in I_\alpha,\ (x, y(x)) \in A \}$$

i) $y_0(x) \equiv y_0 \in \Omega$

ii) $\forall k \geq 0$, si $y_k \in \Omega$ alors la fonction

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\underbrace{t, y_k(t)}_{\in A})\, dt \quad \text{, car } t \in I_\alpha \text{ et } y_k \in \Omega$$

est bien définie et continue sur I_α.
De plus, $\forall x \in I_\alpha$,

$$(*) \begin{cases} \|y(x) - y_0\|_\infty = \| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \|_\infty \leq \\ \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f(t, y(t))\|_\infty dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot \alpha \leq b \end{cases}$$

et donc $y_{k+1} \subset \Omega$.

Proposition: si f satisfait une condition de Lipschitz, c-à-d. s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y), (x,z) \in A$,

$$\|f(x,y) - f(x,z)\|_\infty \leq L\ \|y - z\|_\infty$$

alors la suite $(y_k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy par rapport à la norme $\| \ \|_\infty$ (voir la série 8B).

Remarque : si la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur D alors f satisfait une condition de Lipschitz (voir le théorème des fonctions implicites pour la définition de la matrice $\frac{\partial f}{\partial y}$; voir aussi la série II B).

Démonstration

a) $\forall x \in I_\alpha$, $\quad \| y_{k+1}(x) - y_k(x) \|_\infty \leq M L^k \dfrac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

car : i) $\| y_1(x) - y_0 \|_\infty \leq M |x - x_0|$ (voir (*)).

ii) $\forall k \geq 0$

$$\| y_{k+1}(x) - y_k(x) \|_\infty \leq \left| \int_{x_0}^{x} \| f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t)) \|_\infty dt \right|$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \| y_k(t) - y_{k-1}(t) \|_\infty dt \right|$$

$$\leq M L^k \left| \int_{x_0}^{x} \frac{1}{k!} |t - x_0|^k dt \right| = M L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I_\alpha$.

$$\| y_{k+m}(x) - y_k(x) \|_\infty \leq \sum_{\ell=0}^{m-1} \| y_{k+\ell+1}(x) - y_{k+\ell}(x) \|_\infty$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{m-1} M L^{k+\ell} \frac{|x - x_0|^{k+\ell+1}}{(k+\ell+1)!}$$

$$\leq \frac{M}{L} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^\ell}{\ell!} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

car $\lim_{N \to \infty} \sum_{\ell=0}^{N} \frac{(L\alpha)^\ell}{\ell!} = e^{L\alpha}$

c) de b) il suit que $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$, t.q. $\forall k, \ell \geq k_0$.

$$\| y_k - y_\ell \|_\infty = \sup_{x \in I_\alpha} \| y_k(x) - y_\ell(x) \|_\infty \leq \varepsilon,$$

et $(y_k)_{k \geq 0}$ est donc de Cauchy dans $(\Omega, \| \; \|_\infty)$

Théorème La fonction $y(x) = \lim_{k\to\infty} y_k(x)$ est solution du problème de Cauchy

Démonstration (voir Analyse I, et §9.5.1)

Comme $(y_k(x))_{k\geq 0}$ converge uniformément et $f(x,y)$ est uniformement continue sur A, la suite $(f(x, y_k(x)))_{k\geq 0}$ converge uniformément vers $f(x, y(x))$. On peut donc échanger la limite et l'intégrale et on voit que $y(x)$ est solution de l'équation intégrale. $\square$

Remarque: l'unicité de $y(x)$ suit aussi des estimations déjà établies