12 Apothéose

apothéose
nom féminin

(latin *apotheosis*, du grec *apotheôsis*, action d'élever au rang des dieux)

Prérequis pour lundi

Cours (théorie)

Section 1.5. (ED linéaires du deuxième ordre à coéfficients constants)
Section 1.8. (ED linéaires à coéfficients constants d'ordre supérieur)
Section 1.9. (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)

Prérequis pour mardi

Cours (théorie)

Section 1.5. (ED linéaires du deuxième ordre à coéfficients constants)
Section 1.8. (ED linéaires à coéfficients constants d'ordre supérieur)
Section 1.9. (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)
Théorème de l'inversion locale (démonstration, la fonction phi)
Théorème des fonctions implicites (Notations pour dF/dx et dF/dy)

Cours (exemples)

Section 1.2 (Exemple 2, y'=y^2)
Section 1.9 (Exemple, y'=x^2+y^2) Exercices (comprendre les corrigés !)

Exercices (comprendre les corrigés !)

Série 7B, Exercice 4 (Espace des fonctions continues)
Série 8B, Exercice 2 (Normes sur applications linéaires)
Série 9A, Exercice 2 (Normes matricielles, inverse de (1-X), et de (A-B) avec A inversible)
Série 9A, Exercice 3 (Théorème du point fixe)
Série 9B, Echauffement (Dérivation sous l'intégrale)
Série 10B, Exercice 5 (Théorème des accroissements finis)
Série 11A, Exercice 8 (Dérivée et différentielle)
Série 11A, Exercice 9 (Norme d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans R^m)

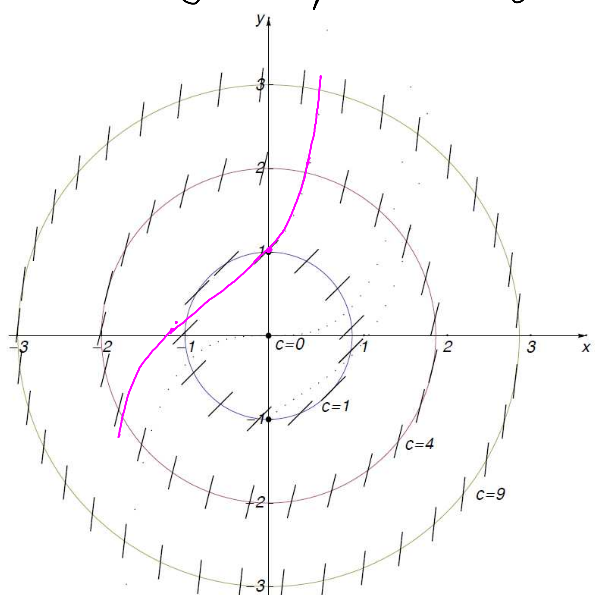
Théorème d'existence et d'unicité (suite de la section 1.10)

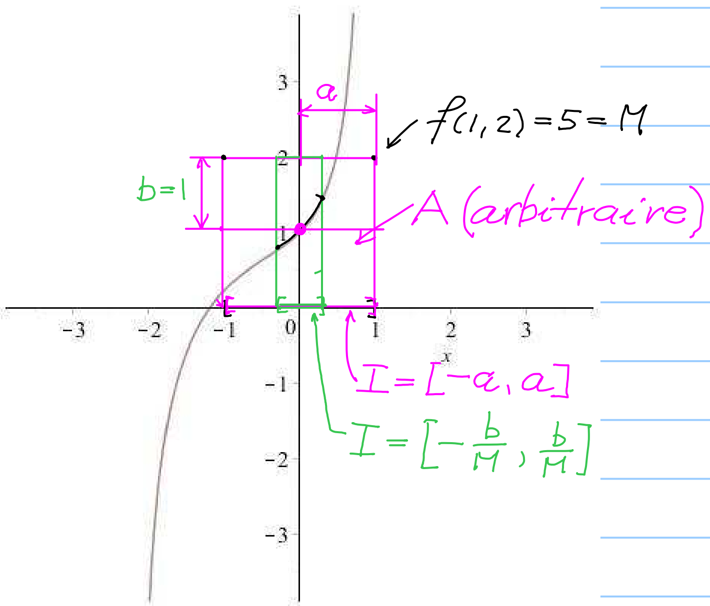
Exemples

$y' = y^2$, $y(0)=1$ (section 1.2)

solution: $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in]-\infty, 1[$

$y' = x^2 + y^2 = f(x,y)$, $y(0) = 1$ (Riccati, section 1.9)





Le cas général

Soient $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(x_0, y_0) \in D$, et considérons le problème de Cauchy

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 .$$

ou d'une manière équivalente l'équation intégrale

$$y(x) = \boxed{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad =: \varphi(y)(x)}$$

où (par abus de notation) $y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction constante $y_0(x) = y_0$.

Idées

1) on cherche un ensemble de fonctions ($=: \Omega$) tel que

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega.$$

Ω sera l'ensemble des fonctions continues sur I dont le graphe est dans le rectangle $\boxed{\cdot}$

2) on montre (sous une hypothèse additionnelle sur f) que φ est une contraction

Ω sera équipé de la norme $\| \ \|_\infty$ et sera donc un espace métrique complet

3) on applique le théorè du point fixe de Banach pour conclure qu'il existe un unique $y = \varphi(y) \in \Omega$ solution du problème de Cauchy.

Proposition 1: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ tels que $A \subset D$, où

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq a, \ \|y - y_0\|_\infty \leq b\},$$

$\mathbb{R}^n$

$$M = \max\{\|f(x,y)\|_\infty : (x,y) \in A\},$$

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \qquad 0 < \alpha \leq \min\{a, \tfrac{b}{M}\},$$

$y_0(x) \equiv y_0$

$$\Omega = \{\omega \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|\omega - y_0\|_\infty \leq b\}.$$

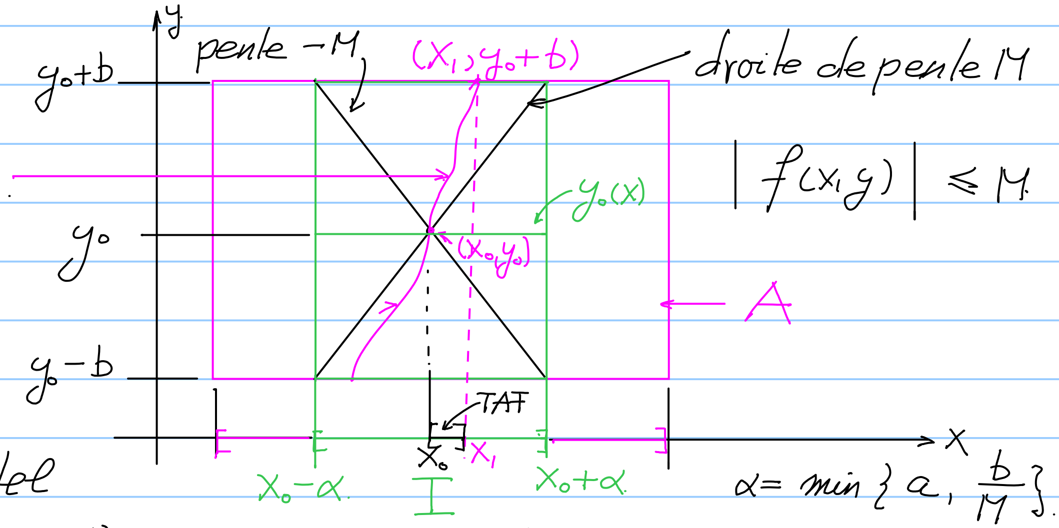
Alors la fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$

$$\varphi(\omega)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \omega(t))\, dt$$

est bien définie ($\Longleftrightarrow \varphi(\Omega) \subset \Omega$)

Motivation pour Ω (dessin pour $n=1$, $D=\mathbb{R}^2$)

impossible comme graphe de la solution car par le TAF il existerait $x \in]x_0, x_1[$ tel



$\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

que $y'(x) = \dfrac{(y_0+b)-y_0}{x_1-x_0} = \dfrac{b}{x_1-x_0} > \dfrac{b}{\alpha} \geq M$ (car $\alpha \leq \dfrac{b}{M}$)

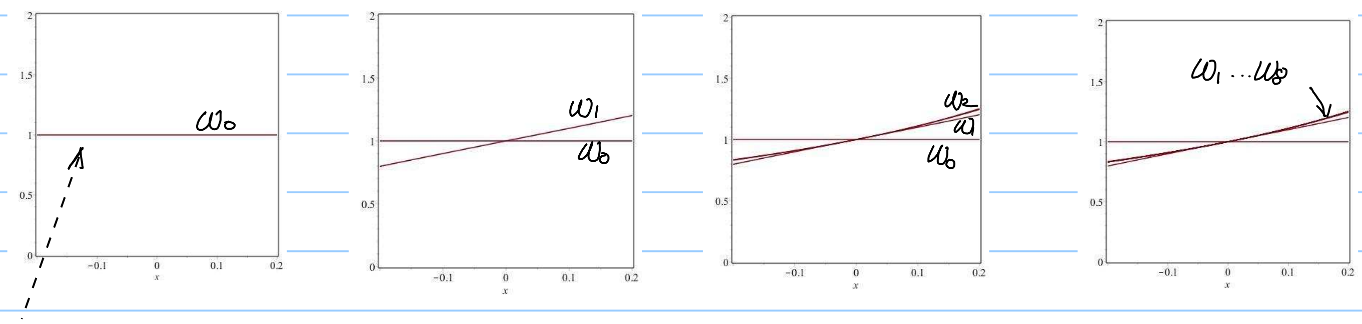
Mais la solution satisfait $y'(x) = f(x, y(x))$
et donc $\forall x \in \mathring{I}$, $|y'(x)| \leq M$.

Remarque

Si $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ est bien définie on peut considérer la suite de fonctions (w_k) où (par tradition) $w_0 = y_0$ et $\forall k \geq 1$ $w_k = \varphi(w_{k-1})$

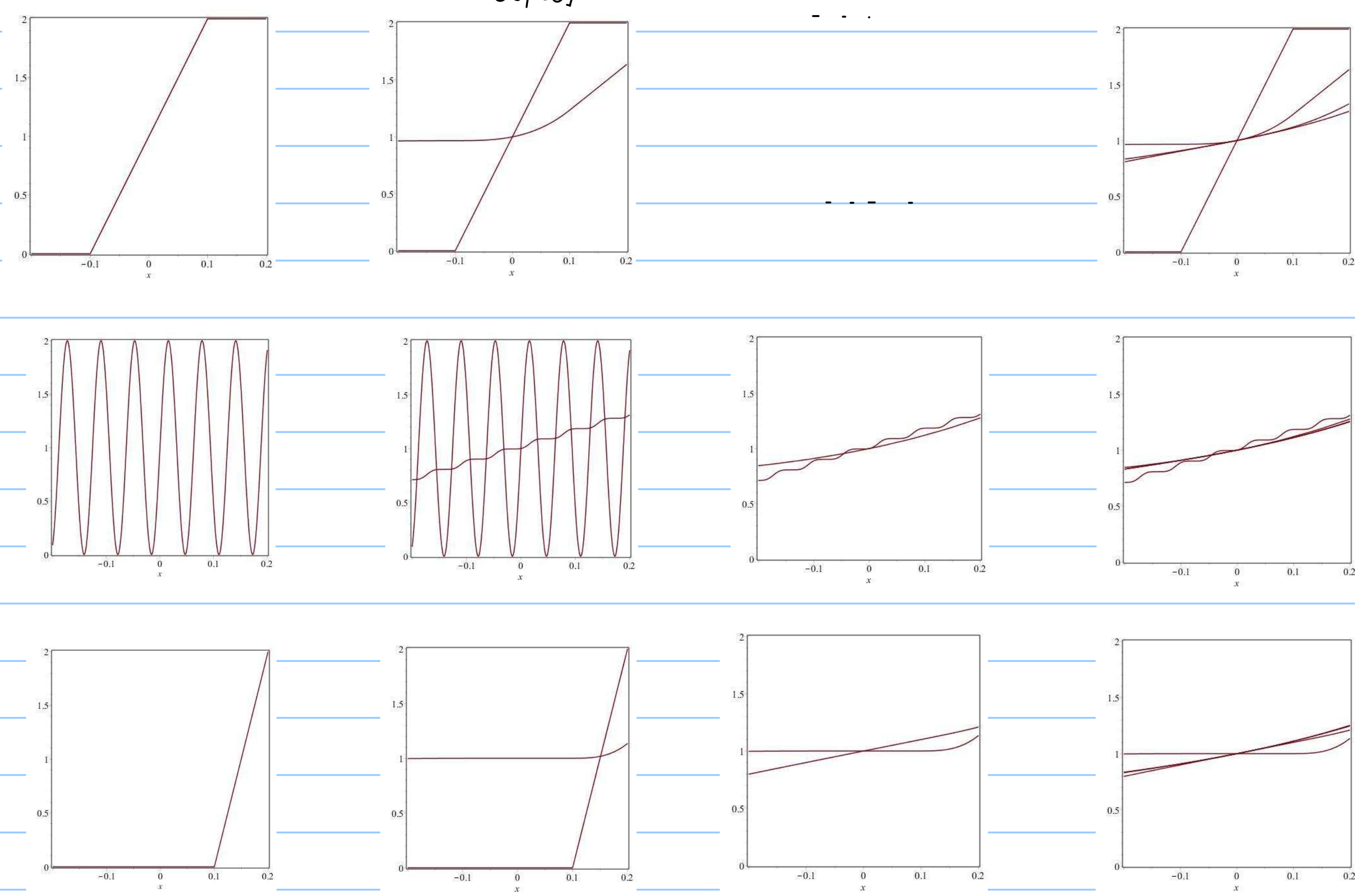
(qui sera de Cauchy si φ est une contraction).

Exemple: $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.



$w_0(x) = y_0(x) \equiv y_0$

w_0 $\qquad$ w_0, w_1 $\qquad$ ...



Explications

- $\forall w_0 \in \Omega$ on a $\varphi(w_0)(x_0) = y_0$
- $\forall w_0 \in \Omega$ tel que $w_0(x_0) = y_0$

  on a $\varphi(w_0)'(x_0) = f(x_0, w_0(x_0)) = f(x_0, y_0)$
- si f est de classe C^∞ alors w_k est de classe C^k.

Démonstration de la proposition 1

Il faut montrer que $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$. Soit donc $\omega \in \Omega$. Alors

$$\varphi(\omega)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\underbrace{t, \omega(t)}_{\in A \text{ car } t \in I \text{ et } \omega \in \Omega}) \, dt$$

est bien définie et continue sur I (en fait $C^1(I)$). De plus, $\forall x \in I$

$$\| \varphi(\omega)(x) - y_0 \|_\infty = \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, \omega(t)) \, dt \right\|_\infty$$

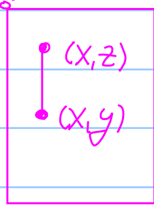
$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \| f(t, \omega(t)) \|_\infty \, dt \right| \leq M \, |x - x_0| \leq M \cdot \alpha \leq b.$$

et donc $\| \varphi(\omega) - y_0 \|_\infty \leq b$ et donc $\varphi(\omega) \in \Omega$

Proposition 2 : supposons que f satisfait une condition de Lipschitz c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \in \mathbb{R}$ telle que $\forall \, (x,y), (x,z) \in A$

ne dépend pas de x !

$$\boxed{\| f(x,y) - f(x,z) \|_\infty \leq L \, \| y - z \|_\infty}$$



Soient $0 < \varsigma < 1$,

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad 0 < \alpha \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{\varsigma}{L} \right\}$$

$$\Omega = \{ \omega \in C(I, \mathbb{R}^4) : \| \omega - y_0 \|_\infty \leq b \}.$$

Alors $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ est une contraction

Démonstration de la proposition 2

Par la proposition 1 $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$. On va montrer que $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$\| \varphi(\omega_1) - \varphi(\omega_2) \|_\infty \leq \rho \, \| \omega_1 - \omega_2 \|_\infty .$$

(donc φ une contraction puisque $\rho < 1$).

$\forall x \in I$

$$\| \varphi(\omega_1)(x) - \varphi(\omega_2)(x) \|_\infty$$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x} \left(f(t, \omega_1(t)) - f(t, \omega_2(t)) \right) dt \right\|_\infty$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \| f(t, \omega_1(t)) - f(t, \omega_2(t)) \|_\infty dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \, \| \omega_1(t) - \omega_2(t) \|_\infty dt . \right.$$

$$\leq L \cdot \alpha \, \| \omega_1 - \omega_2 \|_\infty \leq \rho \, \| \omega_1 - \omega_2 \|_\infty$$

et donc

$$\| \varphi(\omega_1) - \varphi(\omega_2) \|_\infty \leq \rho \, \| \omega_1 - \omega_2 \|_\infty$$

Théorème (≡ proposition 3)

Soit φ comme dans la proposition 2.
Alors la suite (ω_k), $\omega_0 = y_0$ (par exemple), $\forall k \geq 1$, $\omega_k = \varphi(\omega_{k-1})$ converge vers l'unique solution du problème de Cauchy sur $\mathring{I}$ (sur I)

Démonstration de l'unicité

Soit y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy sur I. Alors $\varphi(y_1) = y_1$ et $\varphi(y_2) = y_2$ et donc

$$\|y_1 - y_2\|_\infty = \|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\|_\infty \leq \rho \|y_1 - y_2\|_\infty$$

et donc $\|y_1 - y_2\|_\infty = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$ $\lrcorner$

Démonstration de l'existance (voir Analyse I)

Soit $y \in \Omega$, $y = \lim_{k \to \infty} \omega_k$.

Comme la suite (ω_k) converge uniformément et f est uniformément continue sur $\mathring{A}$, la suite des fonctions $(f(x, \omega_k(x)))$ converge uniformément vers $f(x, y(x))$.
On peut donc échanger (voir série 9B, échauffement) la limite et l'intégrale et donc $y = \varphi(y)$. $\lrcorner$

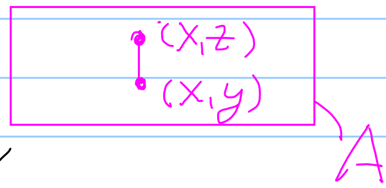
Remarque : si $f(x,y)$ est de classe C^1 par rapport à la variable y, c.-à-d. si la différentielle $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue sur D alors f satisfait une condition de Lipschitz avec

$$L = \sup_{(x,y)\in A} \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\|_\infty .$$

⌈ Démonstration de la remarque (voir série 10B, ex. 5)

Pour $(x,y), (x,z) \in A$ on définit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$g(t) = f(x, (1-t)\,y + t\,z).$$



On a $g(0) = f(x,y)$ et $g(1) = f(x,z)$ et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, (1-t)y + tz)\cdot(z-y).$$

et donc

$$\|g'(t)\|_\infty \leq L\,\|z-y\|_\infty$$

Finalement, puisque

$$f(x,z) - f(x,y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt$$

on trouve que

$$\|f(x,z) - f(x,y)\|_\infty \leq \int_0^1 \|g'(t)\|_\infty\,dt \leq L\,\|z-y\|_\infty$$ ⌋

Exemple: $f(x,y) = x^2+y^2$, $A = [-1,1]\times[0,2]$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

donc $L = 2$ $\left(\text{donc ici } \frac{\rho}{L} \geqslant \frac{1}{M} \text{ si } 1 > \rho \geqslant \frac{L}{M} = \frac{2}{5}\right)$

Remarque finale (solution maximale)

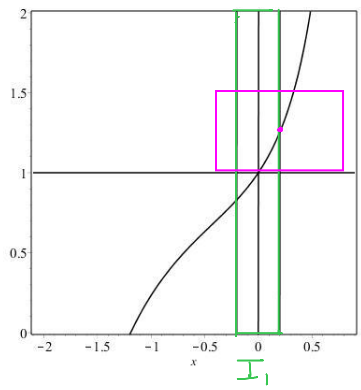
$\lim_{x \nearrow x_0+\alpha} y'(x) = \ell$ existe $(\ell = f(x_0+\alpha, y(x_0+\alpha)))$

et donc (voir Analyse I) $y'(x_0+\alpha) = \ell$. (dérivée à gauche)

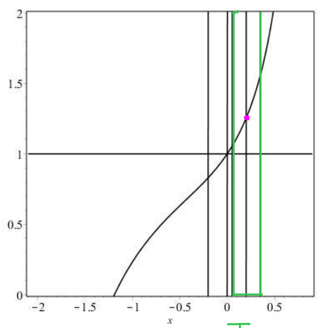
On peut donc continuer la solution en appliquant le théorème d'existence et d'unicité au problème de Cauchy

$$\tilde{y}' = f(x,\tilde{y}) \ , \ \tilde{y}(x_0+\alpha) = y(x_0+\alpha)$$

$$\tilde{y}'(x_0+\alpha) = \ell.$$



I_1



I_2

et ainsi de suite. $\bigcup_{i\geqslant 1} I_i$ sera un intervalle ouvert à droite (sinon on peut continuer la solution). Avec la même procédure en $x_0-\alpha$ on obtient finalement l'intervalle ouvert de la solution maximale.