EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 1	

Exercice Bonus.

(a) Supposons qu'il existe un isomorphisme $\phi\colon \mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(3)}$. Comme ϕ est un morphisme d'anneau, on a $\phi(1) = 1$. En particulier, $\phi(3) = 3$. Notez que $1/3 \in \mathbb{Z}_{(2)}$, donc on a

$$1 = \phi(1) = \phi(3 \cdot 1/3) = 3\phi(1/3),$$

ce qui impliquerait que 3 ait un inverse dans $\mathbb{Z}_{(3)}$. Vu que ce n'est pas le cas, on conclut que ces deux anneaux ne sont pas isomorphes.

(b) Pour tout $f \in \mathbb{Z}[x, y]$, on notera $[f]$ la classe de f dans $\mathbb{Z}[x, y]/(xy - 2024)$.

Supposons qu'il existe un isomorphisme $\phi\colon \mathbb{Z}[x, y]/(xy - 2024) \to \mathbb{Z}[t]$. Notons $p_x(t)$ (resp. $p_y(t)$) l'image de $[x]$ (resp. $[y]$). Comme $[xy - 2024] = 0$, on a que

$$0 = \phi([xy - 2024]) = p_x(t)p_y(t) - \phi([2024]) = p_x(t)p_y(t) - 2024$$

(comme $\phi([1]) = 1$ par définition d'un morphisme d'anneau, $\phi([2024]) = 2024$.)

En d'autres termes,

$$p_x(t)p_y(t) = 2024.$$

Cela implique que $p_x(t)$ et $p_y(t)$ doivent être des polynomes constants. Comme tout élément de $\mathbb{Z}[x, y]/(xy - 2024)$ ets par définition et de somme et produit de $[x]$, $[y]$ et $[1]$, on déduit que

$$\operatorname{im}(\phi) \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[t],$$

et donc ϕ n'est pas surjective. Ainsi, ces deux anneaux ne sont pas isomorphes.

(c) Nous allons montrer que ces deux anneaux sont isomorphes. Premièrement, définissons un morphisme

$$\mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}] \Big/ (pt_p - 1 | p \in \mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Comme tout élément de $\mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}]$ ne contient qu'un nombre fini de variables, pour définir un morphisme $\psi\colon \mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}] \to \mathbb{Q}$, il suffit de préciser les images de chaque variable t_p (exactement comme dans le cas d'un nombre fini de variables). Par définition, nous poserons

$$\psi(t_p) = 1/p \in \mathbb{Q}.$$

Notons que pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\psi(pt_p - 1) = p \cdot 1/p - 1 = 0,$$

donc ψ passe au quotient et définit un morphisme d'anneau

$$\phi\colon \mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}] \Big/ (pt_p - 1 | p \in \mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Nous allons donner deux preuves différentes que ceci définit un isomorphisme.

- Considérons le morphisme canonique

$$\theta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}]\Big/(pt_p - 1|p \in \mathcal{P}).$$

  Comme avant, nous noterons la classe d'un élément $f \in \mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}]$ dans le quotient par $[f]$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\theta(n) = [n]$ est inversible.
  Si $n = \pm 1$, c'est immédiat, alors on sait que l'on peut écrire $n = \pm p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}$, ou chaque p_i est premier, et $i_j \geq 0$ pour tout j. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout p, l'élément $[p]$ est inversible (un produit d'éléments inversible est toujours inversible).
  C'est en fait direct, car pour tout p, on a $[p][t_p] = [1]$.
  Ainsi, par la proposition 2.3.18 du cours (en utilisant les notations du cours, même si la proposition n'est citée que dans le cas d'un corps L, ce dont on a réellement besoin est que pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, $j(a) \in L^\times$), on déduit l'existence d'un morphisme

$$\nu\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}[\{t_p\}_{p\in\mathcal{P}}]\Big/(pt_p - 1|p \in \mathcal{P}),$$

  qui en particulier envoie chaque $1/p$ sur $[t_p]$.
  Vérifions que ν est ϕ sont inverses l'un de l'autres. Le fait que $\phi \circ \nu = id$ est immédiat, car l'identité est le seul endomorphisme de $\mathbb{Q}$. Pour montrer que $\nu \circ \phi = id$, il suffit de l'appliquer à chaque $[t_p]$. On a alors fini, car

$$\nu(\phi([t_p])) = \nu(1/p) = [t_p].$$

- Prouvons directement que ϕ est surjectif et injectif.
  Surjectivité : Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $b > 0$, et écrivons $b = \prod_i p_i^{n_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. Alors

$$\phi\left(a \prod_i t_{p_i}^{n_i}\right) = \frac{a}{b}.$$

  Injectivité : Soit $I = (pt_p - 1|p \in \mathcal{P})$, et montrons que

$$\ker(\psi) = I.$$

  et nous pourrons alors conclure par le premier théorème d'isomorphisme (remarquez de l'inclusion de droite à gauche a déjà été montrée).
  Soit $f(t_{p_1}, \dots, t_{p_l}) \in \ker(\psi)$, et raisonnons par récurrence sur $l \geq 0$. Si $l = 0$, l'assertion est immédiate. Pour l général, simplifions les notation et posons $p := p_l$.
  Ecrivons

$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i t_p^i,$$

  où $f_i \in \mathbb{Z}[t_{p_1}, \dots, t_{p_{l-1}}]$. Raisonnons maintenant par récurrence sur $n \geq 0$. Si $n = 0$, alors on conclut par l'hypothèse de récurrence sur l.
  Ecrivons aussi $\frac{a_i}{b_i} = g_i = \psi(f_i) \in \mathbb{Q}$ avec a_i, b_i premiers entre eux, et posons aussi $g = f(1/p_1, \dots, 1/p_{l-1}, t_p) \in \mathbb{Q}[t_p]$.
  On a alors que $g = \sum_{i=0}^n g_i t_p^i$, et comme $g(1/p) = 0$, on obtient que

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{g_i}{p^i} = \frac{g_0 p^n + g_1 p^{n-1} + \cdots + g_n}{p^n},$$

  i.e.

$$g_0 p^n + g_1 p^{n-1} + \cdots + g_n = 0.$$

Comme les b_i ne sont pas divisible par p, on obtient que p divise a_n. Ecrivons alors $g_n = pg'_n$. Soit $f'_n \in \mathbb{Z}[t_{p_1}, \dots, t_{p_{l-1}}]$ tel que $\psi(f'_n) = g'_n$ (la preuve de la surjectivité montre l'existence d'un tel f'_n).
On a alors que
$$f_n - pf'_n \in \ker(\psi),$$
et par l'hypothèse d'induction sur l, on en déduit que $f_n - pf'_n \in I$.
Ainsi, on a modulo I que
$$f_n t_p^n = t_p^{n-1}(pf'_n t_p - f'_n + f'_n) = t_p^{n-1}(pt_p - 1)f'_n + t_p^{n-1} f'_n,$$
et donc que
$$f = f_0 + f_1 t_p + \cdots + (f'_n + f_{n-1})t_p^{n-1} + t_p^{n-1}(pt_p - 1)f'_n.$$
Ainsi, on déduit (toujours modulo I) que
$$f = f_0 + f_1 t_p + \cdots + (f'_n + f_{n-1})t_p^{n-1}.$$
Comme $\psi(I) = 0$, l'équation ci-dessus montre que
$$f_0 + f_1 t_p + \cdots + (f'_n + f_{n-1})t_p^{n-1} \in \ker(\psi)$$
et donc par l'hypothèse d'induction sur n que
$$f_0 + f_1 t_p + \cdots + (f'_n + f_{n-1})t_p^{n-1} \in I$$
On conclut donc enfin que $f \in I$.