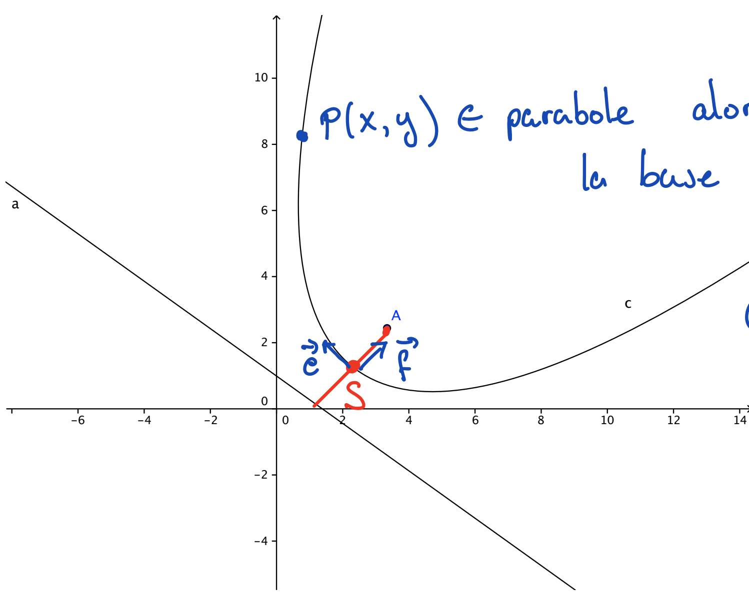
III. Les coniques

1 Rappel sur la parabole

Vous avez défini la parabole de foyer F et de droite directrice d, comme le *lieu géométrique* des points P du plan équidistants de F et de d (on suppose que F n'appartient pas à la directrice). Vous avez vu ensuite que le graphe de toute fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une parabole. Pour cela, vous avez translaté le graphe horizontalement pour que son axe de symétrie soit l'axe vertical $x = 0$, puis verticalement pour que son sommet soit le point $(0; 0)$.
La fonction est alors de la forme $f(x) = x^2/2p$, dont le graphe est une parabole de foyer $F(0; p/2)$ et de directrice $y = -p/2$. $p = \delta(F, d)$
Regardons maintenant le cas général d'une parabole donnée par son foyer $F(u; v)$ et sa directrice d'équation $ax + by + c = 0$:



$P(x, y) \in$ parabole alors relativement à la base $(\vec{e}; \vec{f})$, $y = \dfrac{x^2}{2p}$

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{e} + \frac{x^2}{2p} \cdot \vec{f}$$

$$= 2pt\, \vec{e} + 2pt^2 \vec{f}$$

$x = 2pt \quad , \ t \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'équation générale de la parabole, nous posons simplement l'équation qui traduit l'égalité $\delta(P;F) = \delta(P;d)$ que nous élevons au carré pour ne pas trainer des racines carrées.
Soit $P(x;y)$ un point de la parabole. Alors

$$(x-u)^2+(y-v)^2 = \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2} \iff$$

$$(a^2+b^2)\left[(x^2-2xu+u^2)+(y^2-2yv+v^2)\right] = a^2x^2+b^2y^2+c^2+2abxy+2acx+2bcy$$

$$\iff \underbrace{b^2}_{a^2}x^2+\underbrace{a^2}_{b^2}y^2-\underbrace{2ab}_{-2ab}xy\underbrace{-2\left[(a^2+b^2)u+ac\right]}_{c}x\underbrace{-2\left[(a^2+b^2)v+bc\right]}_{d}y+\underbrace{(a^2+b^2)(u^2+v^2)-c^2}_{e}=0$$

Nous avons donc montré que l'équation générale d'une parabole est une équation quadratique en x et y, d'où le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation cartésienne sous la forme*

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + cx + dy + e = 0,$$

avec a, b, c, d et e des nombres réels. □

$(a = b = 1,\ c = d = 0,\ e \leq 0)$

Exemple 1.2. L'équation $x^2 - 2xy + y^2 = e^2$ détermine une paire de droites parallèles ou confondues si $e = 0$ car

$$(x-y)^2 = e^2 \iff x-y = e \text{ ou } x-y=-e$$

Pour terminer avec la parabole, regardons encore son équation *paramétrique*, c'est-à-dire une équation qui ne dépend que d'un paramètre souvent noté t. Le fait qu'il n'y ait qu'un paramètre indique que la parabole est un objet unidimensionnel et la lettre t rappelle le fait que cette équation pourrait représenter celle de la trajectoire d'un objet au cours du temps.

Soit $F(u;v)$ le foyer et d la directrice. Appelons S le point milieu du segment reliant F à sa projection orthogonale sur d. S est le sommet de la parabole. Choisissons un repère orthonormé en S composé de deux vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{f}$, où $\vec{f} = \frac{2}{p}\overrightarrow{SF}$ est obtenu en normalisant $\overrightarrow{SF}$.
Nous avons tout fait pour nous ramener à l'équation quadratique $y = \frac{1}{2p}x^2$ et pouvons écrire :

Proposition 1.3. *Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation paramétrique de la forme suivante, où $(\vec{e}, \vec{f})$ est une base orthonormée, S un point du plan et $p \in \mathbb{R}$:*

$$\overrightarrow{SP}(t) = 2pt\vec{e} + 2pt^2\vec{f}. = 2p\left(t\vec{e}+t^2\vec{f}\right)$$

2 L'hyperbole

Comme pour la parabole, on se fixe un point F appelé le foyer et une droite d appelée la directrice.

Définition 2.1. Soit $e > 1$. L'*hyperbole* de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e\,\delta(P, d)$. On appelle e l'*excentricité* de l'hyperbole.

Pour nous ramener à l'étude analytique de l'hyperbole, nous allons effectuer un changement de repère de sorte à translater le foyer à l'origine et effectuer une rotation pour que la directrice soit verticale d'équation $x = k$.
Pour $P(x; y)$, l'égalité $\delta(P, F) = e\,\delta(P, d)$ élevée au carré devient

$$x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2 = e^2x^2 - 2e^2kx + e^2k^2.$$

Remarquons qu'il y a deux points S et S' sur la droite passant par F et orthogonale à d qui appartiennent à l'hyperbole. On appelle S et S' les sommets de l'hyperbole. Ils correspondent aux rapports de section $(FD, S) = -e$ et $(FD, S') = e$.

Nous utiliserons plus tard que $\delta(S', d) = \delta(S, d)\,\dfrac{e+1}{e-1}$.

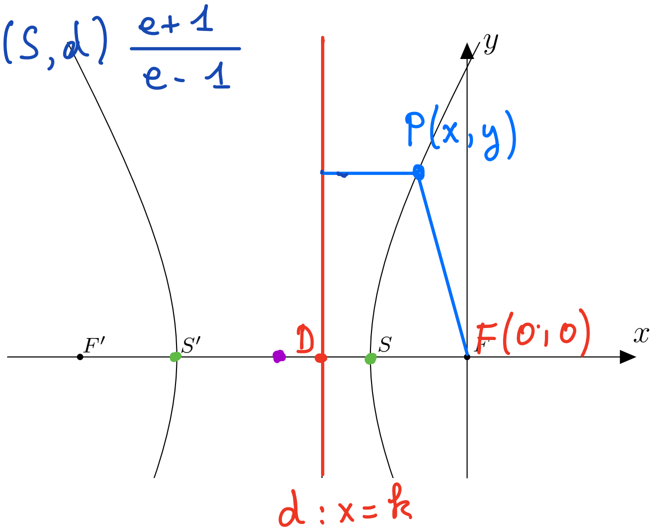
Démo de cette égalité :

$$\delta(S', d) = \delta(S', F) - \delta(F, S) - \delta(S, d)$$

déf hyperbole $\Longleftrightarrow$ $\delta(S', d) = e\,\delta(S', d) - e\,\delta(S, d) - \delta(S, d)$

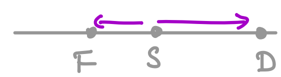
$\Longleftrightarrow$ $\delta(S', d)(1 - e) = -\delta(S, d)(e + 1)$

$\Longleftrightarrow$ $\delta(S', d) = \delta(S, d)\,\dfrac{e+1}{e-1}$

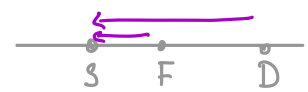


Rappel :

- $(FD, S) = \dfrac{FS}{DS} < 0$ si S est entre F et D



- $(FD, S) > 0$ si S n'est pas entre F et D :



$\dfrac{FS}{DS} > 0$

Analytiquement, on trouve les sommets en posant $y = 0$. ~~Ainsi~~, dans $x^2+y^2 = e^2(x-k)^2$:

$$\Rightarrow x^2 = e^2(x-k)^2 \Leftrightarrow x = \pm e(x-k) \Leftrightarrow x = \frac{ek}{e \pm 1}$$ (vérifiez-le.... !)

Le milieu de S et S' se trouve donc en

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{ek}{e+1} + \frac{ek}{e-1}\right) = \frac{ek(e-1+e+1)}{2(e^2-1)} = \frac{e^2k}{e^2-1}$$

Pour obtenir plus de symétrie, nous effectuons une translation horizontale pour amener l'origine en ce point milieu. Nous remplaçons donc x par $X = x - \dfrac{e^2k}{e^2-1}$ et y reste inchangé $Y = y$.

L'équation devient maintenant

$$\left(X + \frac{e^2k}{e^2-1}\right)^2 + Y^2 = e^2\left(X + \underbrace{\frac{e^2k}{e^2-1} - k}_{= \frac{k}{e^2-1}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \cancel{2\frac{e^2k}{e^2-1}X} + \frac{e^4k^2}{(e^2-1)^2} + Y^2 = e^2\left(X^2 + \cancel{2\frac{k}{e^2-1}X} + \frac{k^2}{(e^2-1)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Y^2 = (e^2-1)X^2 + \underbrace{\frac{e^2k^2}{(e^2-1)^2} - \frac{e^4k^2}{(e^2-1)^2}}_{= \frac{e^2k^2(1-e^2)}{(e^2-1)^2} = \frac{e^2k^2}{1-e^2}}$$

$$\Leftrightarrow Y^2 = (e^2-1)X^2 + \frac{e^2k^2}{1-e^2}$$

Proposition 2.2. *La médriatrice du segment $[SS']$ est un axe de symétrie de l'hyperbole.*

Démonstration. Si le point $P(x, y)$ vérifie l'équation ci-dessus, alors le point $P'(-x, y)$ aussi. □

Le milieu de SS' est aussi un centre de symétrie puisque $P''(-x,-y)$ et $P'''(x;-y)$ sont aussi sur l'hyperbole.

Le comportement asymptotique est une autre conséquence de l'équation précédente.

Proposition 2.3. *Les droites d'équation $y = \pm\sqrt{e^2-1}\,x$ sont les asymptotes obliques des courbes d'équation $y^2 = (e^2-1)x^2 + \dfrac{e^2k^2}{1-e^2}$.*

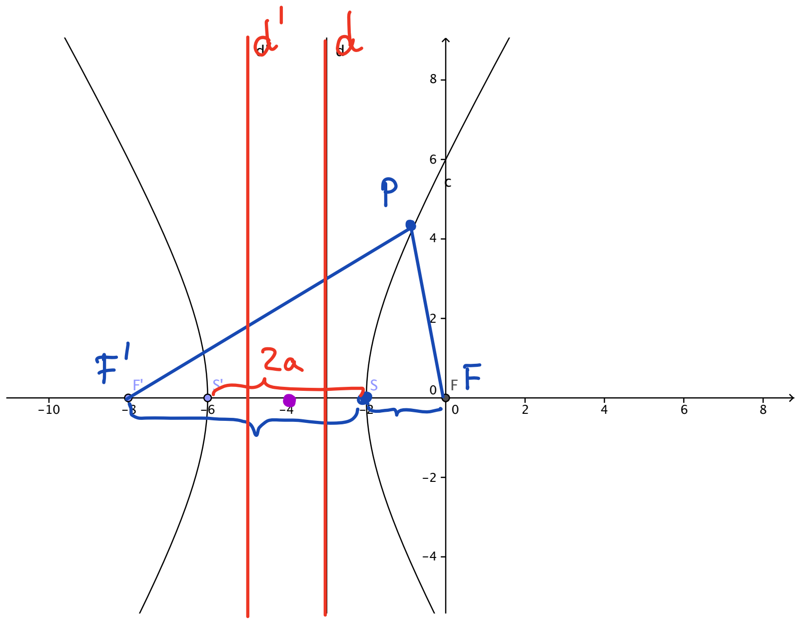
Démonstration. Lorsque x tend vers l'infini, le rapport $\dfrac{y}{x}$ tend vers $\sqrt{e^2-1}$.

□

L'axe de symétrie apparemment anodin découvert ci-dessus nous permet de trouver une autre caractérisation, appelée *bifocale* :

Proposition 2.4. *Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. L'hyperbole de foyer F et dont la distance entre les sommets S et S' vaut $2a$ est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $|\delta(P,F) - \delta(P,F')| = 2a$.*

Démonstration. Avec les mêmes notations que sur l'illustration précédente (page 3), considérons un point arbitraire P de l'hyperbole. Supposons qu'il se trouve du même côté de d que F (sinon on change les rôles de F et F'). On a donc $\delta(P,F) = e\,\delta(P,d)$.



Puisqu'on a un axe de symétrie vertical qui passe par le milieu de SS', on peut représenter d', le symétrique de la directrice d

On a alors $\delta(P,F') = e\,\delta(P,d')$ (F' et d' sont les symétriques de F et d.)

$\delta(S,S') = 2a$.

On a montré en p. 3, $\delta(S',d) = \dfrac{e+1}{e-1}\,\delta(S,d)$

Ainsi, $\delta(S,S') = \delta(S,d) + \delta(S',d) = \delta(S,d)\left(1 + \dfrac{e+1}{e-1}\right) = \dfrac{2e}{e-1}\,\delta(S,d)$.

Ainsi, $\delta(d,d') = \delta(S,S') - 2\delta(S,d) = \delta(S,d)\left(\dfrac{2e}{e-1} - 2\right) = \dfrac{2}{e-1}\,\delta(S,d)$.

Par suite, $\delta(P,F') - \delta(P,F) = e\,\delta(P,d') - e\,\delta(P,d) = e\,\delta(d,d')$

$= e \cdot \dfrac{2}{e-1} \cdot \delta(S,d) = \delta(S,S') = 2a$

□

La forme canonique de l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1.$$

(formule p. 4 divisée par $\frac{e^2k^2}{1-e^2}$)

Le point $(u; v)$ est le point milieu des deux foyers.

En translatant ce point en l'origine, on obtient l'équation $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

L'excentricité e de l'hyperbole doit satisfaire $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, ou encore $e = \sqrt{b^2/a^2 + 1} = \cosh(\text{arcsinh}(b/a))$.

La demi-distance entre les deux sommets est a.

Une grandeur importante est $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, la demi-distance entre les foyers et ainsi, $e = \frac{c}{a}$.

Et pour trouver les directrices, il faut refaire une translation pour mettre le foyer à l'origine !

Quant à l'équation paramétrique, nous en avons vue une en définissant les fonctions de trigonométrie hyperbolique. L'hyperbole dont nous avons écrit l'équation analytique canonique est parcourue par la courbe d'équation

$$f(t) = (\pm a \cosh t + u, b \sinh t + v).$$

Exemple 2.5. Déterminons les caractéristiques de l'hyperbole dont l'équation est $4y^2 - x^2 = 16$. Nous commençons par écrire l'équation sous forme canonique

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

Ici, pour utiliser les formules, il faut permuter les rôles de x et y !

On a donc une hyperbole centrée en $(0, 0)$ orientée "verticalement"

$\Rightarrow$ les foyers se trouvent sur l'axe vertical $x = 0$.

En utilisant l'équation de la page 4 : $y^2 = (e^2-1)x^2 + \frac{e^2k^2}{1-e^2}$

avec $x^2 = 4y^2 - 16$

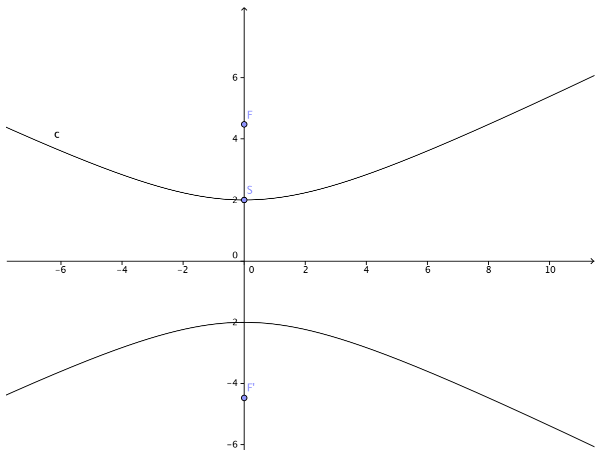
$4 = e^2 - 1 \Rightarrow e = \sqrt{5} \Rightarrow -16 = \frac{5 \cdot k^2}{-4} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{\pm 8\sqrt{5}}{5}$

Sommets de l'hyperbole : $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{16}{4}} = \pm 2$

$S(0; 2)$ et $S'(0; -2)$

Foyer en $(0 ; \pm c)$ où $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Directrices : $k - c = \frac{8\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$



3 L'ellipse

L'étude de l'ellipse est en tous points similaire à celle de l'hyperbole. Elle correspond au cas où l'excentricité est comprise entre 0 et 1 (strictement).

Définition 3.1. Soit $0 < e < 1$. L'*ellipse* de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e\,\delta(P, d)$. On appelle e l'*excentricité* de l'ellipse.

Vous verrez en exercice que l'ellipse admet aussi une description bifocale.

Proposition 3.2. *Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. Une ellipse est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$.*

La forme canonique de l'équation d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1,$$

avec $a > b$. Le « grand axe » est de longueur $2a$, le « petit axe » de longueur $2b$.

Proposition 3.3. *La distance entre le centre $(u; v)$ de l'ellipse et les foyers vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.*

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que le centre est situé en l'origine. L'équation $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ nous permet de calculer l'excentricité car

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Utilisons l'expression bifocale $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$ et le point $P(0; b)$.
Puisque le centre est à l'origine, si $F(c; 0)$, alors $F'(-c; 0)$ et on obtient l'équation

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a,$$

si bien que $c^2 = a^2 - b^2$. □

Exemple 3.4. Quelle est la courbe d'équation $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$?

Il n'y a pas de termes en xy, ce qui indique que nous pouvons compléter les carrés pour nous ramener à l'équation sous forme canonique :

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = \cancel{-144} \cancel{+ 4 \cdot 36} + \underbrace{9 \cdot 16}_{= 144 \ldots}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

$$\overset{: 144}{\Leftrightarrow} \quad \frac{(x-6)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{4^2} = 1$$

C'est une ellipse dont le grand axe est horizontal de longueur $2 \cdot 6 = 12$ et le petit axe vertical de longueur $2 \cdot 4 = 8$

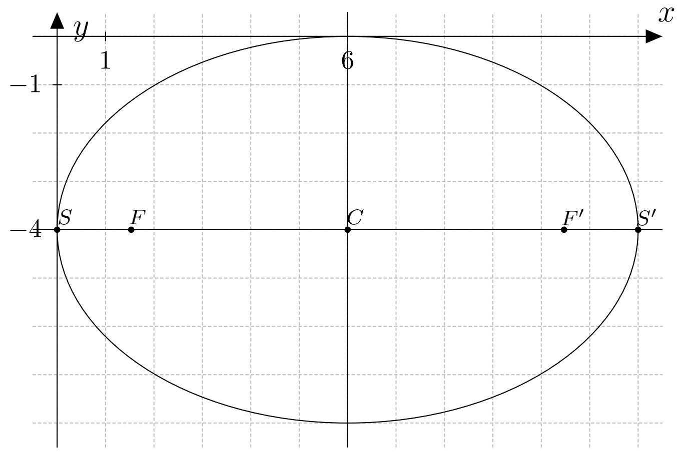
Centre : $(6; -4)$

Sommets : lorsque $y = -4$, $\frac{(x-6)^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow x - 6 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 6 \pm 6$

$S_1(0; -4)$ et $S_2(12; -4)$

Foyers : à distance $\sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ du centre $\Rightarrow 6 \pm 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow F_1(6 + 2\sqrt{5}; -4)$ et $F_2(6 - 2\sqrt{5}; -4)$



Résumé :

Parabole : $\delta(P,F) = \delta(P,d)$

Hyperbole :

$\delta(P,F) = e\,\delta(P,d)$, $e > 1$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Centre (u, v)

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$$

$a = \frac{1}{2}$ distance entre S et S'

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = e \cdot a$

$= \frac{1}{2}$ distance entre F et F'

Ellipse

$0 < e < 1$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Centre (u, v)

$$0 < e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$$

$2a$ = grand axe

$2b$ = petit axe

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = e \cdot a$

$= \frac{1}{2}$ distance entre F et F'