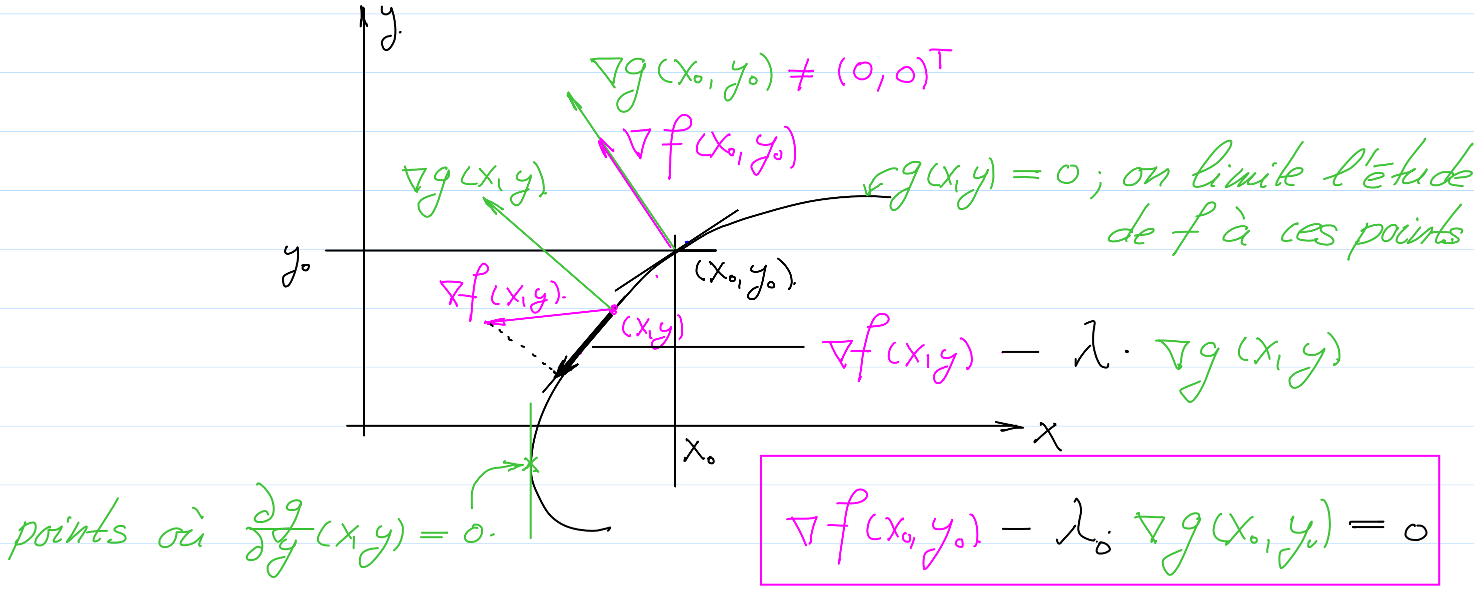
Démonstration du théorème



$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0) - \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0) = 0}$$

Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Puisque $g(x_0, y_0) = 0$ le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'une fonction h, définie dans un voisinage de x_0 telle que $h(x_0) = y_0$ et $g(x, h(x)) = 0$ ("on peut isoler y" dans l'équation $g(x,y) = 0$). On peut donc, comme dans le premier exemple, utiliser la méthode I et remplacer dans f la variable y par $h(x)$ et chercher des points stationnaires de la fonction $s(x) := f(x, h(x))$. On a

$$s'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))\, h'(x)$$

et en x_0 on trouve avec $h(x_0) = y_0$

$$s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, h'(x_0)$$

et $s'(x_0) = 0$ par hypothèse (=: point stationnaire de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$). Mais, par le théorème des fonctions implicites, on a que

$$h'(x_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

et donc

$$s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)} = 0 .$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{avec} \quad \lambda_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)$$

Ceci montre le théorème sous condition que $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Si $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ on a forcément que $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ (sinon $\nabla g(x_0,y_0) = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $(*)$ du théorème), et par le théorème des fonctions implicites il existe donc une fonction $\tilde{h}$, telle que $\tilde{h}(y_0) = x_0$ et $g(\tilde{h}(y),y) = 0$ pour y dans un voisinage de y_0, et on peut refaire la démonstration avec les mêmes conclusions. $\square$

Théorème (cas général)

Soient les fonctions $f, g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $1 \leq m \leq n-1$, de classe C^1 et un point $\underline{x}_0 \in D$ tel que $g_i(\underline{x}_0) = 0$, $i = 1, \dots, m$, et les vecteurs $\nabla g_i(\underline{x}_0)$, $i = 1, \dots, m$ soient linéairement indépendants (pour $m = 1$ c'est la condition $(*)$). Si f admet en $\underline{x}_0$ un extremum sous les contraintes $g_i(\underline{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$ alors il existe un vecteur $\underline{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que la fonction de Lagrange

$$F : D \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{x}, \underline{\lambda}) \longmapsto f(\underline{x}) - \langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \rangle$$

où $g(\underline{x}) := (g_1(\underline{x}), \ldots, g_m(\underline{x}))^T \in \mathbb{R}^m$

soit stationnaire en $(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0)$.

<u>Notation:</u> $\langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{x})$

<u>Démonstration</u> on utilise le théorème des fonctions implicites pour exprimer m variables en termes des autres $n-m$ variables. Par exemple, soit.

$$\underline{x} = (x, y) \in U \times V \subset D$$

$$x = (x_1, \ldots, x_{n-m}), \quad y = (x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$$

Alors $g : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g(x_0, y_0) \equiv g(\underline{x}_0) = 0$

et si $\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$ on a $y = h(x)$,

avec $y_0 = h(x_0)$ et la fonction

$$s(x) = f(x, h(x))$$

satisfait $s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h'(x_0)$,

ce qui implique que.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_0)}_{1 \times (n-m)} - \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}_0)}_{1 \times m} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{x}_0)\right)^{-1}}_{m \times m}}_{= \lambda_0} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(\underline{x}_0)}_{m \times (n-m)} = 0$$