Produit vectoriel dans V_3 (ou $\mathbb{R}^3$) muni d'une base orthonormée directe.

$$\vec a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec b = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec a \wedge \vec b = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf-ce \\ cd-af \\ ae-bd \end{pmatrix}$$

Propriétés géométriques remarquables : • $\vec a \perp \vec a \wedge \vec b$ et $\vec b \perp \vec a \wedge \vec b$

"$\times$" = "$\wedge$"

II. Métrique dans l'espace.

• $\|\vec a \wedge \vec b\| = \sigma(\vec a ; \vec b)$

• $(\vec a ; \vec b ; \vec a \wedge \vec b)$ est directe si $\vec a$ et $\vec b$ non colinéaires.

Les particularités du produit vectoriel vu la semaine dernière permettent de l'utiliser dans de nombreux contextes. Nous commencerons par reparler d'équation cartésienne de plan, puis étudierons les méthodes métriques pour calculer des distances, des surfaces, des angles et des volumes dans l'espace. Nous terminerons avec la sphère dans l'espace.

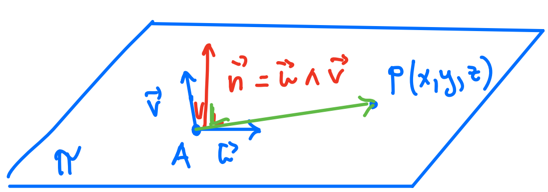
1 Le plan dans l'espace

En exploitant les propriétés du produit scalaire, vous avez vu que l'équation cartésienne d'un plan perpendiculaire au vecteur $\vec n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ est de la forme $n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Nous cherchons maintenant à décrire le plan donné par deux *vecteurs directeurs*

$$\vec u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

passant par un point $A = (a_1; a_2; a_3)$. Nous pouvons calculer le produit vectoriel $\vec u \wedge \vec v$ pour obtenir un vecteur normal au plan, puis utiliser le fait que le point A appartient au plan.



On pose $\vec n = \vec u \wedge \vec v$

$P(x,y,z) \in \pi \iff \vec{AP} \perp \vec n$

$\iff \vec{AP} \cdot \vec n = 0$

$\iff \underbrace{\vec{AP} \cdot (\vec u \wedge \vec v)}_{\text{produit mixte !}} = 0$

Nous pouvons aussi obtenir directement l'équation cartésienne du plan avec un déterminant :

Proposition 1.1. *L'équation cartésienne du plan α de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par le point $A = (a_1; a_2; a_3)$ est donnée par*

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. $P = (x; y; z) \in \alpha \Leftrightarrow$ $\vec{AP} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

Comme $\vec{AP} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix}$, il vient $\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

□

Exemple 1.2. Déterminons l'équation du plan défini par les points $A = (1; -1; 2)$, $B = (2; 3; 4)$ et $C = (-2; 3; 0)$.

Les vecteurs $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont directeurs.

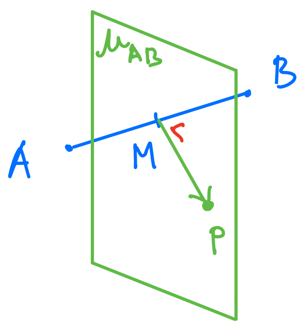
$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -3 \\ y+1 & 4 & 4 \\ z-2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -16(x-1) - 4(y+1) + 16(z-2)$$
$$= -16x - 4y + 16z - 20 = 0$$

L'équation du plan est (après simplification par -4) : $4x + y - 4z + 5 = 0$

Dans le plan, le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités d'un segment $[AB]$ s'appelle la *médiatrice*. Dans l'espace, ce même lieu géométrique est un plan.

Définition 1.3. Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Le *plan médiateur* du segment $[AB]$ est le lieu géométrique des points équidistants de A et B.

Si $A = (a_1; a_2; a_3)$ et $B = (b_1; b_2; b_3)$, quelle est l'équation de ce plan médiateur ?



Le plan médiateur μ_{AB} de A et B passe par le point milieu M de A et B. De plus,

$$P \in \mu_{AB} \iff \vec{MP} \perp \vec{AB}$$

$$\iff \vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x - \frac{a_1+b_1}{2} \\ y - \frac{a_2+b_2}{2} \\ z - \frac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

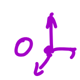
On peut l'interpréter comme $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire, les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

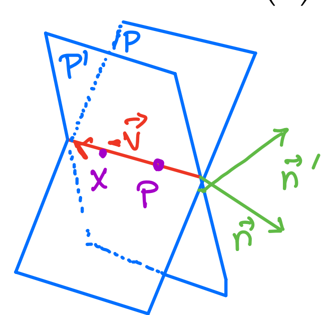
Voyons encore comment on peut calculer l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ donnés chacun par leur équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et respectivement $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Le vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et le vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\vec{n'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Ainsi un vecteur directeur de la droite d'intersection est donné par

$$\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



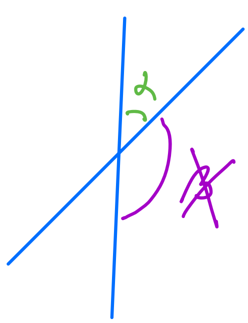


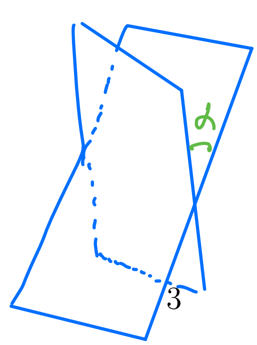
Il ne reste plus qu'à trouver un point P commun au deux plans et écrire l'équation paramétrique de la droite d'intersection :

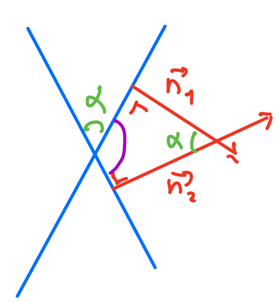
$P(p_1, p_2, p_3)$

$$X \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \iff \vec{OX} = \vec{OP} + k\vec{v} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Définition 1.4.
*L'*angle entre deux droites *est le plus petit angle formé par deux vecteurs directeurs.*
*L'*angle entre deux plans *est le plus petit angle formé par deux vecteurs normaux non nuls.*

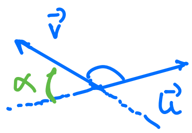






Nous savons calculer l'angle α entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puisque $\vec{u} \bullet \vec{v} =$ $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha$

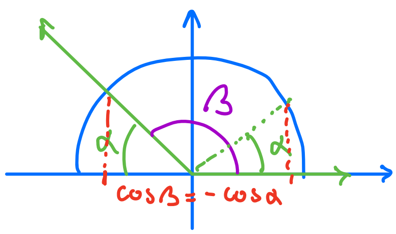
Mais $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$ donne un angle obtus si $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est négatif. Nous calculerons donc



$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$$

qui donnera toujours l'angle α aigu entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, des vecteurs directeurs quelconques non nuls.

En effet, si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, $\arccos\left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) = \beta$ est obtus, alors que



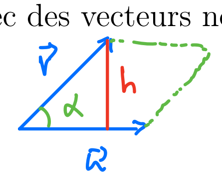
$\arccos\left(\dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right) = \alpha$ est l'angle aigu souhaité.

Exemple 1.5. Calculons l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

Avec des vecteurs non nuls de l'espace, on peut aussi utiliser un produit vectoriel et la formule



$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin(\alpha) \overset{\vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}}{\Leftrightarrow} \alpha = \arcsin\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$$

ici, pas de souci
α est toujours aigu !

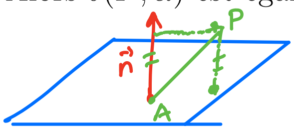
2 Distances dans l'espace

Nous voulons maintenant établir des formules pour calculer la distance entre deux objets dans l'espace : entre un point et un plan, entre un point et une droite, ou entre deux droites.
Pour commencer nous donnons la formule analogue à celle qui permet de calculer la distance entre un point et une droite du plan. Il s'agit alors de la distance entre un point et sa projection orthogonale sur un plan.

Proposition 2.1. *Soit $P = (p_1; p_2; p_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $ax + by + cz + d = 0$ un plan α. Alors la distance entre P et α est donnée par les équations*

$$\delta(P;\alpha) = \frac{|\,ap_1 + bp_2 + cp_3 + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration. Soit $A = (a_1; a_2; a_3) \in \alpha$ tel que $A \neq P$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à α.
Alors $\delta(P;\alpha)$ est égale à la norme de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$:



$$\delta(P;\alpha) = \left\| \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{\|\vec{n}\|^2}\cdot\vec{n} \right\| = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{\|\vec{n}\|^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{\|\vec{n}\|}$$

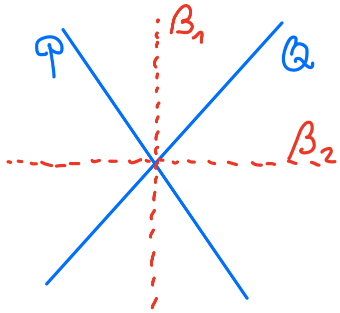
Utilisons le fait que $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p_1-a_1 \\ p_2-a_2 \\ p_3-a_3 \end{pmatrix}$ et prenons $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\delta(P;\alpha) = \frac{|\,ap_1+bp_2+cp_3+d-(\overbrace{aa_1+ba_2+ca_3+d}^{=0 \text{ car } A\in\alpha})\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

□

Définition 2.2. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans sécants dans l'espace.
Les *plans bissecteurs* de ces deux plans sont définis comme le lieu géométrique des points de l'espace situé à égale distance des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Notons que, comme il y a dans le plan deux bissectrices pour une paire de droites concourantes, il y a deux plans bissecteurs pour une paire de plans sécants dans l'espace.



Si $\mathcal{P}$ est donné par $ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{Q}$ est donné par $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, alors les plans bissecteurs sont donnés par

$$\delta(X;\mathcal{P}) = \delta(X;\mathcal{Q}) \iff \frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'z+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

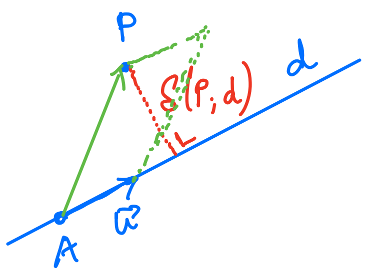
En effet, la valeur absolue des expressions se trouvant de part et d'autre de l'égalité est la distance d'un point $(x; y; z)$ aux planx $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Passons maintenant à la formule de calcul de la distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.3. *La distance du point P à la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est*

$$\delta(P;d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Démonstration. $\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\|$ correspond à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{u}$



$$\sigma(\overrightarrow{AP};\vec{u}) = \|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\cdot\delta(P;d)$$

D'où $$\delta(P,d) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

□

Voici enfin la formule donnant la distance entre deux droites, c'est-à-dire la distance la plus courte entre deux points de chacune des droites.

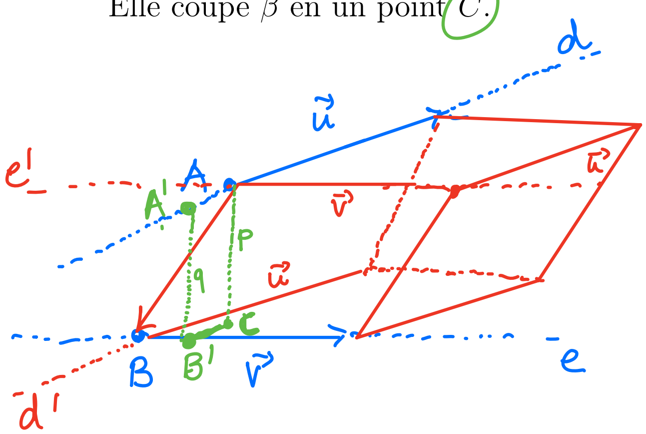
Proposition 2.4. *Soit d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et e une droite non parallèle à d passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$. La distance entre ces deux droites est*

$$\delta(d;e) = \frac{|\,\overrightarrow{AB} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})\,|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Démonstration. Soit d' la parallèle à d passant par B et e' la parallèle à e passant par A.
Le parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour volume $\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\right| = \left|\det(AB,\vec{u},\vec{v})\right|$
Il a pour faces parallèle les plans $\alpha = (A,\vec{u},\vec{v})$ et $\beta = (B;\vec{u},\vec{v})$ dont la distance vaut

$$\delta(\alpha,\beta) = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

Reste à montrer qu'il existe deux points $A' \in d$ et $B' \in e$ tels que $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \delta(\alpha, \beta)$
Considérons la droite p, perpendiculaire aux plans α et β et passant par A.
Elle coupe β en un point C.



La parallèle à d passant par C coupe e en B' et la parallèle à AC par B' coupe d en A'.

$$\delta(A'B') = \delta(d,e) = \delta(\alpha;\beta)$$ □

3 La sphère dans l'espace

Nous terminons avec une brève étude de la sphère. Par définition la sphère de rayon r et de centre $C = (a; b; c)$ est le lieu géométrique des points $P = (x; y; z)$ tels que $\|\overrightarrow{CP}\| = r$.
Par conséquent l'équation cartésienne de cette sphère est donnée par

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Exemple 3.1. Montrons que l'équation $x^2 + 4x + y^2 - 8y + z^2 = 5$ ~~et~~ est l'équation d'une sphère en déterminant le centre et le rayon de cette dernière.

$$\left(x^2 + 4x + 2^2\right) + \left(y^2 - 8y + 4^2\right) + z^2 = 5 + 2^2 + 4^2 \iff$$
$$(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 = 5^2$$

$\Rightarrow$ Sphère de $C(-2; 4; 0)$ et de rayon 5.

De manière absolument semblable au cas de la tangente à un cercle, on trouve l'équation du plan tangent à une sphère.

Proposition 3.2. *Soit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ l'équation d'une sphère Σ dans $\mathbb{R}^3$ et $T = (s; t; u)$ un point de la sphère. Alors le plan tangent à la sphère passant par T est donné par l'équation*

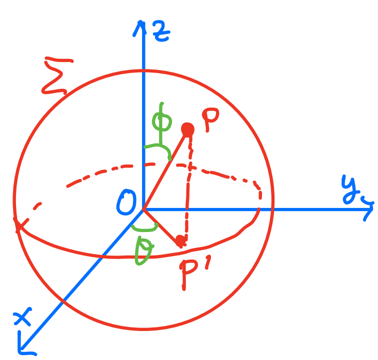
$$\tau : (x-a)(s-a) + (y-b)(t-b) + (z-c)(u-c) = r^2$$

Démonstration. On voit immédiatement que $T \in \tau$ puisque $T \in \Sigma$.

De plus, un vecteur normal à τ est $\begin{pmatrix} s-a \\ t-b \\ u-c \end{pmatrix} = \overrightarrow{CT}$ qui est le rayon de Σ passant par T. □

Pour obtenir un modèle vectoriel et paramétrique de la sphère, il faut se souvenir qu'un point de la sphère unité est déterminé par deux angles : celui que fait sa projection sur le plan horizontal avec l'axe Ox et celui qu'il fait avec l'axe vertical Oz.

Notons le premier $\theta \in [0; 2\pi]$ et le second $\phi \in [0; \pi]$



Soit $P \in \Sigma \iff \|\overrightarrow{OP}\| = 1$

Soit P' la projection orthogonale de P sur Oxy.

$\Rightarrow \|\overrightarrow{OP'}\| = |\sin\phi|$ et

$P'(\cos\theta \cdot \sin\phi ; \sin\theta \cdot \sin\phi ; 0)$

Alors, si P est un point de la sphère unité, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$

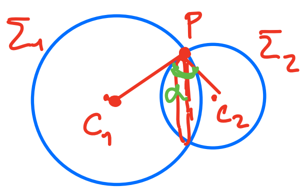
Par conséquent, une sphère de centre C et de rayon r a pour équation vectorielle paramétrique

$$A \in \Sigma \iff \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + r \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0; 2\pi[, \quad \varphi \in [0; \pi], \quad r \in \mathbb{R}_+$$

Profitons de définir l'angle entre deux sphères ! Soit Σ et Σ' deux sphères dans l'espace, centrées respectivement en C et C', et P un point commun. Alors l'angle que font les sphères en ce point P est l'angle que font les plans tangents en P. Puisque le vecteur $\overrightarrow{CP}$ est normal au plan tangent à Σ en P, cet angle α est simplement donné par l'angle entre les rayons $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{C'P}$.
On le calcule par exemple grâce au produit scalaire, puisque

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{C'P} = ||\overrightarrow{CP}|| \cdot ||\overrightarrow{C'P}|| \cos\alpha = rr' \cos\alpha.$$

Remarque 3.3. En général deux sphères sécantes se coupent en un cercle γ
Pourquoi l'angle entre les sphères est-il le même en chacun des points d'intersection ?



Par rotation autour de l'axe C_1C_2, on retrouve $\alpha = \measuredangle C_1PC_2 \quad \forall P \in \gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

Exemple 3.4. Calculons l'angle entre les sphères Σ et Σ' données par les équations

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \Sigma' : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

$C(0, 0; 0)$ et $r = 1$ $\qquad$ $C'(0; 1; 0)$ et $r' = \frac{1}{2}$

$\Sigma \cap \Sigma'$ se situe dans un plan $\perp$ à $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cherchons un point d'intersection en posant (par exemple) $z = 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 0^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + 0^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} 2y - 1 = \frac{3}{4} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{7}{8} \\ x = \pm\sqrt{\frac{64-49}{64}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{8} \end{cases}$$

Choisissons $I\left(\frac{\sqrt{15}}{8}; \frac{7}{8}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C'I} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{C'I}}{||\overrightarrow{CI}|| \cdot ||\overrightarrow{C'I}||} = \frac{\frac{15-7}{64}}{1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \simeq 75{,}5°$$

NB : On peut aussi utiliser le thm du cosinus dans un triangle CIC' avec $||\overrightarrow{CI}|| = 1$; $||C'I|| = \frac{1}{2}$ et $||\overrightarrow{CC'}|| = 1$ ...