Corrigé Test 5 - Intégration 1er mai 2024

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier.

Exercice 1. *(5 points)*

Soit $f : [1;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

En utilisant une subdivision quelconque, calculer les valeurs de $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$, puis $s(f)$ et $S(f)$. En conclure ensuite si f est intégrable ou non.

On choisit une subdivision quelconque $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$.
Soit m_i le minimum et M_i le maximum de f sur $[x_{i-1}; x_i]$.
m_i et M_i existent $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$ puisque f est continue sur $[1;2]$.
$m_i = 0$ et $M_i = 1$ $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$ puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, qui est continu. Alors

$$\begin{aligned} s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \cdot (x_1 - x_0) + 0 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0 \\ S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $s(f) = 0$ et $S(f) = 1$ ce qui implique que f n'est pas intégrable.

Exercice 2. *(7 points)*

a) Enoncer le théorème fondamental du calcul intégral.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

b) Démontrer le théorème de la moyenne :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un élément c de $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Soit m le minimum de la fonction f sur $[a,b]$ et M son maximum. Comme $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x, on a que

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

Ainsi, la valeur $h = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ est comprise entre m et M. Comme la fonction f est continue, par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c tel que $f(c) = h$.
D'où le résultat.

Exercice 3. *(2 + 2 + 6 + 6 = 16 points)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2} = 2x + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow\ F(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = (2x+1)e^{-2x^2-2x} \Rightarrow\ F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x^2-2x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{5x^2+6}{x^3+2x}$ (décomposition en éléments simples)

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{5x^2+6}{x^3+2x} = \frac{5x^2+6}{x(x^2+2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2} = \frac{a(x^2+2)+(bx+c)x}{x(x^2+2)} = \frac{ax^2+2a+bx^2+cx}{x(x^2+2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ c=0 \\ 2a=6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$$

On a donc $\quad f(x) = \dfrac{5x^2+6}{x^3+2x} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2x}{x^2+2}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = 3\ln(|x|) + \ln(|x^2+2|) + c = \ln(\,|x|^3(x^2+2)\,),\ c \in \mathbb{R}.$$

d) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+6x+18}$ (complétion de carré)

On a $\quad \dfrac{x-4}{x^2+6x+18} = \dfrac{x-4}{(x+3)^2+9}$

En posant $u = x+3$, on obtient $\quad \dfrac{u-7}{u^2+9} = \dfrac{u}{u^2+9} - \dfrac{7}{u^2+9} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2u}{u^2+9} - \dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{u}{3}\right)^2+1}$,

dont les primitives sont $\dfrac{1}{2}\ln(|u^2+9|) - \dfrac{7}{9}\cdot 3\arctan\left(\dfrac{u}{3}\right)$. Ainsi,

$$F(x) = \ln(\sqrt{x^2+6x+18}) - \frac{7}{3}\arctan\left(\frac{x+3}{3}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. *(7 points)*

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$.

Déterminer l'aire du domaine D borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox.

On remarque que les zéros sont $-3; 0; 3$ et que f est impaire.

Il faut donc calculer l'aire en deux morceaux, qui auront chacun la même aire.

$$A_1 = \int_{-3}^{0} x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-3}^{0} -2x(9-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\right]_{-3}^{0} = \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(9-x^2)^3}\right]_{-3}^{0}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 27 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 0\right) = -9$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots = \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(9-x^2)^3}\right]_{0}^{3} = -\frac{1}{3}\cdot 0 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 27\right) = 9$$

Ainsi, l'aire du domaine est égale à $A = |A_1| + |A_2| = 2\cdot|A_1| = 2\cdot 9 = 18$ u^2.

Exercice 5. *(5 + 6 + 6 = 17 points)*

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ en appliquant le changement de variables $x = \sqrt{\sin(t)}$.

On pose $x = \varphi(t) = \sqrt{\sin(t)}$ d'où $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2}\cdot(\sin(t))^{-1/2}\cdot\cos(t) = \dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}$.

De plus, si $x \in [0;2]$, alors $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cdot\frac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculer $\displaystyle\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par parties.

On doit calculer $I = \displaystyle\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $f = e^{2x}$ et $g' = \cos(x)$, donc $f' = 2e^{2x}$ et $g = \sin(x)$. On calcule

$$I = \int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = e^{2x}\sin(x) - \int 2e^{2x}\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

On refait une intégration par parties avec
$f = 2e^{2x}$ et $g' = \sin(x)$, donc $f' = 4e^{2x}$ et $g = -\cos(x)$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= e^{2x}\sin(x) - \left(2e^{2x}\cdot(-\cos(x)) - \int 4e^{2x}\cdot(-\cos(x))\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cdot\cos(x) - 4\int e^{2x}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cdot\cos(x) - 4I \end{aligned}$$

Ainsi, $5I = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cdot\cos(x) + c$, donc $I = \dfrac{1}{5}(e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cdot\cos(x)) + c$

c) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par parties.

On pose $f = \ln(x)$ et $g' = \sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $f' = \dfrac{1}{x}$ et $g = \dfrac{2}{3}x^{3/2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\ln(x)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2\frac{x^{3/2}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}\ln(x)\sqrt{x^3}\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\ln(x)\sqrt{x^3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3}\ln(2)\sqrt{8} - \frac{4}{9}\sqrt{8} - \left(0 - \frac{4}{9}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ln(2) - \frac{8\sqrt{2}}{9} + \frac{4}{9} \cong 0,49 \end{aligned}$$

Exercice 6. *(3 + 3 = 6 points)*

Etudier la convergence des intégrales suivantes (on demande uniquement si l'intégrale est convergente ou divergente) :

a) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$

On fait le changement de variables $t = x - 2$, donc $\quad x = \varphi(t) = t + 2 \quad$ et $\quad \varphi'(t) = 1$

Si $x \in [2; 10]$, alors $t \in [0; 8]$. On a donc

$$\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^8 \frac{1}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t$$

Par un critère de convergence, comme $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$, l'intégrale généralisée converge.

Remarque : On aurait pu faire directement le calcul, qui donne $\left[3t^{1/3}\right]_0^8 = 6$.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^3-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

On remarque que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^3+1} = 2 \neq 0$.

Ainsi, par un critère de convergence on sait que cette intégrale généralisée diverge.

Remarque : on peut aussi faire le calcul de la primitive et vérifier qu'elle diverge, mais c'est plus long !

On commence par faire une division euclidienne, puis une décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{2x^3-1}{x^3+1} = 2 - \frac{3}{x^3+1} = 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Les primitives sont alors

$$F(x) = 2x - \ln(|x+1|)\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Les détails du calcul pour la primitive de $\dfrac{1}{x^3+1}$ sont faits dans l'exercice 1c) de la série 24.