Exercice 1. Un vecteur non-nul $\vec{v} = (a_1)$ de V_1 est linéairement indépendant (si $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$, alors $\lambda = 0$ car $a_1 \neq 0$) et engendre n'importe quel autre vecteur de $\mathbb{R}$ (pour $\vec{w} = (b_1)$, on a $\frac{b_1}{a_1} \cdot \vec{v} = \vec{w}$). Ainsi, l'ensemble des bases de V_1 est $V_1 \backslash \{0\}$. La raison pour laquelle on exclut 0 est qu'il est impossible de générer un vecteur quelconque avec un multiple de 0.

Exercice 2.

a) Non, car par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des deux vecteurs donnés. En effet, $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution.

b) Oui, soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de V_2, alors l'équation vectorielle $x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet comme solution $x = \dfrac{3\,a - 2\,b}{2}$, $y = -\dfrac{5\,a - 4\,b}{4}$, ce qui prouve que le vecteur quelconque $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux vecteurs donnés.

c) Non car une combinaison linéaire de ces deux vecteurs formera toujours un vecteur de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

d) Oui, soit un vecteur quelconque $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ de V_4, alors l'équation vectorielle

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

admet comme solution :

$$x = \frac{-d + 3\,c + b + a}{4},\ y = -\frac{-d - c - 3\,b + a}{4},\ z = -\frac{-d - c + b + a}{4},\ t = \frac{d - c - b + a}{2},$$

ce qui prouve que le vecteur quelconque $\vec{v}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des cinq vecteurs donnés. (On n'a pas pris en compte le quatrième vecteur qui est la somme des deux premiers.)

Exercice 3.

a) Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants car l'un n'est pas multiple de l'autre ; il n'en existe donc pas de combinaison linéaire non-triviale donnant le vecteur nul. Ces 2 vecteurs forment donc une base de V_2 en vertu d'une proposition du cours.

b) Comme $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, les deux vecteurs sont colinéaires, et ne peuvent donc pas former une base de V_2.

c) On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce calcul nous montre que les trois vecteurs sont linéairement dépendants, ils sont donc coplanaires et ne peuvent ainsi pas former une base de V_3.

d) De la même manière, $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ainsi $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc ces vecteurs ne forment pas une base de V_3.

e) Comme $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, les vecteurs ne forment pas une base de V_3.

f) Les 3 vecteurs sont linéairement indépendants et par une proposition du cours, ils forment une base de V_3. Pour voir qu'ils sont linéairement indépendants, résous l'équation vectorielle $\alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; on obtient bien $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (le vecteur nul ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire non-triviale de ces vecteurs).

Exercice 4. On observe que $2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc $2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$. Ce calcul montre que le vecteur $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ appartient au plan formé par $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ puisqu'il s'exprime comme combinaison linéaire de ceux-ci. Ainsi les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 5.

a) Faux, car une base de V_3 contient toujours trois vecteurs, tandis que dans V_2 trois vecteurs sont toujours linéairement dépendants.

b) Vrai, car par hypothèse $(\vec{u}, \vec{v})$ forment une base de V_2, ils forment donc en particulier un système de générateurs et donc tout vecteur de V_2 peux s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi ajouter un (ou plusieurs) vecteur(s) à la liste ne change pas le fait que c'est un système de générateurs (par contre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont forcément linéairement dépendants).

c) Vrai, car le vecteur $\vec{0}$ est toujours linéairement dépendant de tout autre vecteur, il ne peut donc pas faire partie d'une base.

d) Faux, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il n'existe aucun vecteur de V_2 qui ne soit pas colinéaire à $\vec{w}$ et donc aucune base ne le contenant.

e) Vrai, en effet soit $\vec{w} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Alors par exemple, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est tel que $(\vec{v}, \vec{w})$ forme une base de V_2.

f) Faux, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il n'existe aucun vecteur de V_3 qui ne soit pas colinéaire à $\vec{w}$ et donc aucune base ne le contenant.

g) Vrai, en effet on peut toujours choisir un autre vecteur $\vec{v}$ de V_3 qui ne soit pas colinéaire à $\vec{w}$ et un troisième vecteur $\vec{u}$ non coplanaire au plan formé par $(\vec{w}, \vec{v})$, par exemple en prenant $\vec{u}$ normal à ce plan.

Exercice 6.

a) On a

$$\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix} = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi$$

b) Pour $\vec{u}, \vec{u} \in V_2$, on a

$$\vec{u} \text{ et } \vec{u} \text{ sont linéairement indépendants} \iff (x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0} \implies x = y = 0)$$

En composantes, l'équation $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0}$ s'écrit comme le système suivant :

$$\begin{cases} ax + cy = 0\\ bx + dy = 0\end{cases}$$

Par la méthode de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires, un tel système possède une unique solution (qui sera forcément $x = 0$ et $y = 0$) si et seulement si $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} \neq 0$.

Par une proposition du cours, deux vecteurs de V_2 forment une base si et seulement si ils sont linéairement indépendants, ce qui nous permet de conclure.

c) Par le même raisonnement que ci-dessus, les trois vecteurs de V_3 sont linéairement indépendants si et seulement si pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} ax + dy + gz = 0\\ bx + ey + hz = 0\\ cx + fy + iz = 0\end{cases}$$

admet une unique solution (qui sera $x = y = z = 0$). Si le déterminant D associé au système est non nul, les résultats sur la méthode de Cramer impliquent qu'il existe bien une unique solution, et les vecteurs sont linéairement indépendants.

Il faut encore montrer que si $D = 0$, les trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants (le résultat de Cramer ne nous permet pas de conclure si tous les déterminants D, D_x, D_y et D_z sont nuls). Supposons donc que $D = 0$ (on observe par ailleurs que $D_x = D_y = D_z = 0$ pour le système ci-dessus), et montrons que les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants ; pour cela, nous allons résoudre le système d'équations par la méthode de Gauss.

- Tout d'abord, si $\vec{u} = \vec{0}$, alors la solution $x = 1$, $y = z = 0$ du système montre que les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.
- On peut donc supposer $\vec{u} \neq \vec{0}$, et par exemple $a \neq 0$ (si $a = 0$ et $b \neq 0$, le raisonnement est similaire, de même si $a = b = 0$ et $c \neq 0$). Après une étape de Gauss, on se retrouve avec le système

$$\begin{cases} x + d'y + g'z = 0 \\ \qquad e'y + h'z = 0 \\ \qquad f'y + i'z = 0 \end{cases}$$

  Si $e' = f' = 0$, alors soit $d' = 0$, auquel cas la solution $y = 1$ et $x = z = 0$ est une solution non nulle du sysème, soit $d' \neq 0$, auquel cas $x = -d'$, $y = 1$ et $z = 0$ est une solution non nulle du système. Dans les deux cas, les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.
- On peut maintenant supposer $e' \neq 0$ (car si $e' = 0$, on a $f' \neq 0$ et le raisonnement est similaire), et l'étape suivante de Gauss donne le système

$$\begin{cases} x + d'y + g'z = 0 \\ \qquad y + h''z = 0 \\ \qquad\quad i''z = 0 \end{cases}$$

  Il est nécessaire maintenant de revenir au détail de Gauss(!) : nous sommes dans le cas où $a \neq 0$ et $e' = e - \frac{bd}{a} \neq 0$; on a

$$\begin{aligned} i'' = i' - \frac{f'h'}{e'} &= \left(i - \frac{cg}{a}\right) - \frac{\left(f - \frac{cd}{a}\right)\left(h - \frac{bg}{a}\right)}{e - \frac{bd}{a}} = \frac{(ia - cg)}{a} - \frac{(af - cd)}{a} \cdot \frac{(ha - bg)}{a} \cdot \frac{a}{(ea - bd)} \\ &= \frac{a^2ei - abdi - aceg + bcdg - a^2fh + abfg + acdh - bcdg}{a(ea - bd)} = \frac{aei - bdi - ceg - afh + bfg + cdh}{ea - bd} \end{aligned}$$

  dont le numérateur est exactement D — qui est nul par hypothèse. Dans ce cas, $z = 1$, $y = -h''$ et $x = d'h'' - g'$ est une solution non nulle du système.

Ceci montre que les trois vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant principal du système est non nul (avec plus d'outils théoriques, cette démonstration peut être grandement simplifiée !). Par une proposition du cours, 3 vecteurs de V_3 forment une base si et seulement si ils sont linéairement indépendants, ce qui nous permet de conclure.

Exercice 7.

a) Par l'exercice précédent, il suffit de montrer que le déterminant formé par les 3 vecteurs est nul. On calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

et donc $\mathcal{B}$ est bien une base.

b) Pour simplifier les calculs, résolvons d'abord le système général

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

par Cramer. Les déterminants associés sont $D = -2$, calculé au point précédent, ainsi que

$$D_x = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - y + z,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix} = y - z - x,\ D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = -y - z + x$$

Les coefficients cherchés sont donc

$$\alpha = \frac{-x-y+z}{-2},\ \beta = \frac{y-z-x}{-2},\ \alpha = \frac{-y-z+x}{-2}$$

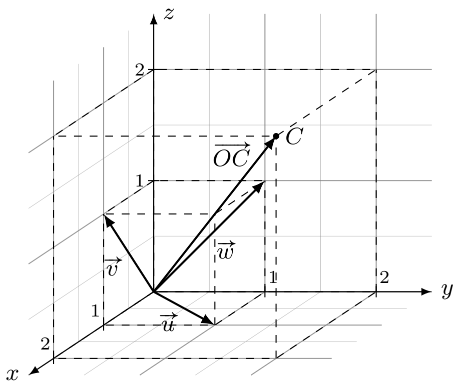
et on obtient directement les composantes des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} (-5+0+0)/-2 \\ (0-0-5)/-2 \\ (-0-0+5)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} (-0-0+7)/-2 \\ (0-7-0)/-2 \\ (-0-7+0)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} (-2-2+2)/-2 \\ (2-2-2)/-2 \\ (-2-2+2)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} (-1-1+1)/-2 \\ (1-1-1)/-2 \\ (-1-1+1)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} (-1-2+3)/-2 \\ (2-3-1)/-2 \\ (-2-3+1)/-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c)



Exercice 8. Il faut résoudre par la méthode de ton choix le système $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$. La solution est $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$.

Exercice 9.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} &= \frac{9}{10}\left(\frac{1}{12}\vec{x} + \frac{5}{3}\vec{b}\right) - 2\vec{a} \mid \cdot 120 \\ 90\vec{b} - 60\vec{a} &= 9\vec{x} + 180\vec{b} - 240\vec{a} \\ 9\vec{x} &= 180\vec{a} - 90\vec{b} \mid :9 \\ \vec{x} &= 20\vec{a} - 10\vec{b} \end{aligned}$$

et donc $\vec{x} = 20 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -98 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Par un exercice précédent, ils sont colinéaires si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2m-1 & m+2 \end{vmatrix}$ est nul. Autrement dit si et seulement si $m^2 + 2m - 6m + 3 = 0 \iff m = 1$ ou $m = 3$.

Exercice 11. De même, les vecteurs sont coplanaires

$$\iff \begin{vmatrix} 3 & 2 & m \\ -5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2m+3 \end{vmatrix} = -2 - 20m + 12 + 20m + 30 = 0 \iff 40 = 0$$

Autrement dit ils ne sont jamais coplanaires.

Exercice 12. De même, les vecteurs sont coplanaires

$$\iff \begin{vmatrix} 9m & 0 & 8 \\ 0 & 1 & m^2 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 9m^2 - 16 = 0 \iff (3m-4)(3m+4) = 0 \iff m = \pm\frac{4}{3}.$$