Série 30

Exercice 1. Normalisation d'un vecteur. Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul de V_n. Montre que le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ est un vecteur *unitaire* (c'est-à-dire de norme égale à 1) de même sens et même direction que $\vec{u}$. Ce vecteur unitaire est la *normalisation de* $\vec{u}$.

Normalise les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de V_2 et $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ de V_3.

Exercice 2. Les polynômes comme espace vectoriel. Nous travaillons dans $\mathbb{R}[x]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en une indéterminée x. Considérons l'ensemble P_2 des polynômes de degré ≤ 2.

a) Montre que P_2 est un espace vectoriel.

b) Montre que le triplet de polynômes $(1; x; x^2)$ forme une base de P_2.

c) Montre que le triplet de polynômes $(1-x; 1+x; x)$ ne forme pas une base de P_2.

d) Montre que le triplet de polynômes $(1+x; 1+x+x^2; 1)$ forme une base de P_2.

Exercice 3. Reporte dans $\mathbb{R}^2$, muni du repère usuel (considère une grille graduée horizontalement de -6 à 13 et verticalement de -3 à 11), les points $A = (3; -1)$, $B = (-3; 0)$, $C = (10; 10)$, $D = (-5; 5)$, $E = (7; 0)$. Soit maintenant la base $\mathcal{B} = (\vec{v}; \vec{w})$ de V_2 formée des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontre qu'il s'agit bien d'une base.

b) Calcule algébriquement les composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.

c) Trouve géométriquement (en effectuant une construction à la règle sur la grille) les mêmes composantes. Explique la construction que tu effectues.

Exercice 4. On considère les points $A = (5; 2)$, $B = (6; -3)$, $C = (7; 8)$, $D = (3; 8)$, $E = (5; -6)$ et $F = (-1; 36)$. Détermine si les points A, B et C sont alignés et explique ton raisonnement. Fais de même pour les points D, E et F.

Exercice 5. On considère les points $A = (3; 4; 5)$, $B = (9; -18; -15)$ et $P = (12; -14; -10)$. Détermine si ces trois points sont alignés et, si c'est le cas, calcule le rapport de section (AB, P).

Exercice 6. On considère les points $A = (-2; -1)$, $B = (7; 0)$ et $C = (1; 5)$. Calcule les coordonnées du quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.