EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 10	

Si vous le souhaitez, vous pouvez rendre votre solution de l'exercice bonus sur la page Moodle du cours avant le mardi 14 mai à 18h.

Exercice 1.
Soient $K \subset L \subset F$ des extensions de corps. Si $K \subset L$ et $L \subset F$ sont algébriques, montrez qu'il en est de même pour $K \subset F$.

Exercice 2.
Soit $n > 0$ un entier positif. Montrez que $\cos(2\pi/n)$ et $\sin(2\pi/n)$ sont des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3.
Soit $\mathbb{Q}(x)$ le corps de fractions de l'anneau polynomial $\mathbb{Q}[x]$, et considérons

$$s := \frac{x^3+2}{x} \in \mathbb{Q}(x).$$

On a les extensions successives $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(s) \subset \mathbb{Q}(x)$.

1. Montrez que $\mathbb{Q}(x)$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(s)$.
2. Calculez $[\mathbb{Q}(s) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(s)]$.

Exercice 4.
Soit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ pour un entier $n > 2$. Démontrez que les corps de décomposition de $x^n - 2$ et de $x^{2n} - 3x^n + 2$ sur $\mathbb{Q}$ sont isomorphes entre eux, et aussi isomorphes à

$$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[n]{2}) \subseteq \mathbb{C}.$$

Exercice 5.

1. Considérons la situation suivante:
   - $\phi : K \to K'$ est un isomorphisme des corps,
   - $K \subseteq L$ et $K' \subseteq L'$ sont deux extensions de corps
   - $L = K(\alpha)$ et $L' = K(\alpha')$ avec α et α' algébriques sur K et K' respectivement
   - si $\xi : K[x] \to K'[x]$ est l'homomorphisme induit par ϕ, alors $\xi(m_{\alpha,K}) = m_{\alpha',K'}$

   Démontrez qu'il existe une extension unique de ϕ à un isomorphisme $\eta : L \to L'$ tel que $\eta(\alpha) = \alpha'$
2. Démontrez que $K(x)[\sqrt{x+1}] \cong K(x)[\sqrt{x+2}]$
3. Démontrez que $K(x,y)[\sqrt{xy}] \cong K(x,y)[\sqrt{x(x+y)}]$

Exercice Bonus.
Soit $p > 0$ un nombre premier, posons $L = \mathbb{F}_p(x,y)$ et $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subseteq L$.

1. Calculer le degré de l'extension $K \subseteq L$.
2. Calculer le groupe
$$\mathrm{Gal}(L/K) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{corps}}(L),\ \sigma|_K = id_K\}.$$

3. Montrer que cette extension ne peut pas être générée par un seul élément.

4. Montrer qu'il existe une infinité de sous-extensions $K \subseteq F \subseteq L$ différentes.

Le théorème principal de la théorie de Galois montre en particulier que si $K \subseteq L$ est une extension Galoisienne, alors il y a un nombre fini de sous-extensions $K \subseteq F \subseteq L$. L'exercice ci-dessus montre que cette conséquence est fausse dans le cas inséparable.

Le troisième point montre aussi que le théorème de l'élément primitif est faux dans le cas inséparable.