

Corrigé test 5 : Intégration.**Exercice 1** (4 + 6 + 6 + 4 = 20 pts)

Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes

$$\text{a) } f(x) = (2 + x^3)\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + c = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{9}\sqrt{x^9} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \text{On pose } t = x - 5 \Leftrightarrow x = t + 5 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 1$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-5}} dx = \int \frac{(t+5)^2}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{t^2 + 10t + 25}{\sqrt{t}} dt = \int t^{\frac{3}{2}} + 10t^{\frac{1}{2}} + 25t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{20}{3}t^{\frac{3}{2}} + 50t^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + \frac{20}{3}\sqrt{t^3} + 50\sqrt{t} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{20}{3}\sqrt{(x-5)^3} + 50\sqrt{x-5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Autre changement de variable possible :

$$t = \sqrt{x-5} \Leftrightarrow x = t^2 + 5 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 2t$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-5}} dx = \int \frac{(t^2+5)^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int t^4 + 10t^2 + 25 dt = 2 \left( \frac{1}{5}t^5 + \frac{10}{3}t^3 + 25t \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{20}{3}(\sqrt{x-5})^3 + 50\sqrt{x-5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \frac{4x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1) + (bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{ax^2 + a + bx^2 - bx + cx - c}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2 + (c-b)x + (a-c)}{(x-1)(x^2+1)} \quad ED(f) = \mathbb{R} - \{1\} \end{aligned}$$

$$\text{Il faut donc que } \begin{cases} a+b = 4 \\ c-b = -1 \\ a-c = 1 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ c-b = -1 \\ a-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int \frac{2}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \ln|x-1| + \ln(x^2+1) + \arctan x + c = \ln((x-1)^2) + \ln(x^2+1) + \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 34} = \frac{1}{(x-3)^2 - 9 + 34} = \frac{1}{(x-3)^2 + 25}$$

$$\text{On pose } t = x - 3 \Leftrightarrow x = t + 3 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 1 \text{ d'où } f(t) = \frac{1}{t^2 + 25} = \frac{1}{25} \frac{1}{\left(\frac{t}{5}\right)^2 + 1}$$

$$F(t) = \frac{1}{25} \cdot 5 \arctan\left(\frac{t}{5}\right) + c \text{ et } F(x) = \frac{1}{5} \cdot \arctan\left(\frac{x-3}{5}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Exercice 2** (4 + 4 + 4 + 6 + 4 = 22 pts)

Calculer les intégrales suivantes

$$a) \int_1^3 \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2} dx = \int_1^3 2x - 3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} dx = \left[ x^2 - 3x + \ln(x) + \frac{1}{x} \right]_1^3 =$$

$$9 - 9 + \ln(3) + \frac{1}{3} - 1 + 3 - \ln(1) - 1 = \frac{4}{3} + \ln 3$$

$$b) \int_0^2 \frac{16x + 10}{\sqrt{1 + 5x + 4x^2}} dx = 2 \int_0^2 \frac{8x + 5}{\sqrt{1 + 5x + 4x^2}} dx = 2 \left[ 2\sqrt{1 + 5x + 4x^2} \right]_0^2 = 4 \cdot (3\sqrt{3} - 1)$$

$$c) t = 7x \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}t \Rightarrow dx = \frac{1}{7}dt \quad x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{14} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{14}} \sin^3(7x) \cdot \cos(7x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cdot \cos(t) \frac{1}{7} dt = \left[ \frac{1}{28} \sin^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{28}$$

$$d) x = \sqrt{11} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{11} \cos t dt \quad x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ et } x = \sqrt{11} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{11}} \sqrt{11 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{11 - 11 \sin^2 t} \cdot \sqrt{11} \cos t dt = 11 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt =$$

$$11 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 11 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = 11 \left[ \frac{2t + \sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 11 \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{11\pi}{4}$$

$$e) u = \frac{x}{3} \Rightarrow u' = \frac{1}{3} \quad v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{x}{3} \cdot e^x dx = \left[ \frac{x}{3} \cdot e^x \right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} \frac{1}{3} \cdot e^x dx = \left[ \frac{x}{3} \cdot e^x - \frac{1}{3} \cdot e^x \right]_0^{\ln 3} = \ln 3 - 1 - 0 + \frac{1}{3} = \ln 3 - \frac{2}{3}$$

**Exercice 3** (5 pts)Montrer que la longueur de la courbe de la fonction  $f(x) = \sin x$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$  se situe dansl'intervalle  $\left[\frac{\pi\sqrt{7}}{12}; \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right]$ .

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx$$

Or,  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \leq \cos x \leq \cos 0 = 1 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$  et donc  $\frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} \leq \sqrt{1 + \cos^2(x)} \leq \sqrt{2}$ 

$$\text{Ainsi, } \frac{\pi\sqrt{7}}{12} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{7}}{2} dx \leq L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2} dx = \frac{\pi}{6} \sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}.$$

**Exercice 4** (5 + 3 = 8 pts)

a) Théorème de la moyenne.

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Il existe alors un élément  $c$  de  $[a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

*Démonstration* : Soit  $m$  le minimum de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et  $M$  son maximum.

Comme  $m \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x$ , on a que

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a).$$

Ainsi, la valeur  $h = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$  est comprise entre  $m$  et  $M$ .

Comme  $f$  est continue, par le Théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = h$ . D'où le résultat.

b) Théorème fondamental du calcul intégral :

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $G$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

**Exercice 5** (5 + 2 = 7 pts)

a)  $f$  impaire sur  $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  et le graphe de  $f$  a l'origine pour centre de symétrie.

Ainsi,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_{-t}^0 f(x) dx = - \int_0^t f(x) dx$  et pour toute primitive  $F$  de  $f$ , on a

$$F(0) - F(-t) = \int_{-t}^0 f(x) dx = - \int_0^t f(x) dx = -F(t) + F(0), \text{ c'est-à-dire } F(-t) = F(t).$$

b)  $f$  est continue et impaire sur  $\mathbb{R}$  car  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{\sin(x)}{x^2 + 1} = -f(x)$ .

Ainsi, toutes ses primitives  $F$  sont paires et  $\int_{-a}^a \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} dx = F(a) - F(-a) = 0$ .

**Exercice 6** (1 + 7 = 8 pts)

a) On calcule  $f(1) = g(1) = 1$ .

b)  $g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 5$  d'où

$$A_{\mathcal{D}} = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx - \int_1^5 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 - \left[-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x\right]_1^5 =$$

$$\frac{3}{4}(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}) + \frac{5^2}{8} - \frac{5^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} = \frac{3}{4}(2^4 - 1) + \frac{25 - 50 - 1 + 10}{8} = \frac{45}{4} - 2 = \frac{37}{4}$$