Exercice 1. L'intérêt acquis au bout d'un an sera égal à $500 \cdot 0.04 = 20$ Fr. Raisonnons par récurrence sur n. Au début de la deuxième année on dispose de $C_1 = C_0(1+i)$. Supposons qu'au début de la $n-1$ ème année on dispose de $C_{n-1} = C_0(1+i)^{n-1}$ et donc au début de la n-ième on disposera de $C_n = C_0(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = C_0(1+i)^n$. Le capital dont on dispose après 2 ans vaut $C_2 = C_0(1+i)^2 = 500 \cdot (1+0.04)^2 = 540.8$ Fr.

Exercice 2. Marie disposera de $1000(1+0.06) = 1060$ Fr, $1000(1+0.06/12)^{12} \cong 1061.68$ Fr, tandis que Nathalie disposera de $1000(1+0.06/365)^{365} \cong 1061.83$ Fr.

Exercice 3.

a) Le capital acquis après une de ces périodes vaut $C_0\left(1+\dfrac{i}{k}\right)$ et donc après k périodes il vaut $C_0\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^k$.

b) $\lim\limits_{k\to\infty} C_0\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^k = C_0 \cdot \mathrm{e}^i$ par définition du nombre e.

c) Par le point précédent, la valeur acquise pendant n années vaudra $C_n = C_0 \cdot (\mathrm{e}^i)^n = C_0 \cdot \mathrm{e}^{in}$.

d) Si on place 1000 Fr au taux annuel continu de 6%, la valeur acquise après une année sera égale à $1000 \cdot \mathrm{e}^{0.06} \cong 1061.84$ contre 1060 Fr pour un taux annuel, où on a utilisé la formule du point précédent avec $n = 1$.

Exercice 4. Cette fonction est paire car si $x \geq 0$ alors $f(-x) = (1/a)^{-x} = a^x = f(x)$ et si $x < 0$ alors $f(-x) = a^{-x} = (1/a)^x = f(x)$.

Exercice 5.

a) On a les équivalence suivantes $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2} \quad | \quad \log_7(\cdot)$
$\iff 8x^2+4 = (2-3x)^2$
$\iff 8x^2+4 = 4-12x+9x^2$
$\iff x^2-12x = 0$
$\iff x(x-12) = 0$, et ainsi $S = \{0; 12\}$

b) $7^{2x+1} = 1 \iff 7^{2x+1} = 7^0 \quad | \quad \log_7(\cdot) \iff 2x+1 = 0$, et ainsi $S = \{-1/2\}$

c) $\dfrac{16^x \cdot 125^x}{5} = \dfrac{10^4}{5^{x+1}} \quad | \quad \cdot 5^{x+1}$
$\iff 16^x \cdot 125^x \cdot 5^x = 10^4$
$\iff \left(10^4\right)^x = 10^4 \quad | \quad \log_{10^4}(\cdot)$
$\iff x = 1$, et ainsi $S = \{1\}$.

d) $\mathrm{e}^x = -1$ cette équation n'a pas de solution car la fonction $\exp_{\mathrm{e}}$ a $\mathbb{R}_+^*$ pour ensemble d'arrivée et donc $S = \emptyset$.

e) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$
$\iff 2^{6x} + 2 \cdot 2^{3x} \cdot 3 + 9 = 0$
$\iff (2^{3x}+3)^2 = 0$
$\iff 2^{3x} = -3$, cette dernière équation n'admet pas de solution car la fonction $\exp_2$ a $\mathbb{R}_+^*$ pour ensemble d'arrivée et donc $S = \emptyset$.

f) $3^{x+1} + 3^{-x} = 4 \quad | \quad \cdot 3^{x-1}$
$\iff 3^{2x} - \dfrac{4}{3} \cdot 3^x + \dfrac{1}{3} = 0$
$\iff 3^x = \dfrac{4/3 \pm \sqrt{(-4/3)^2 - 4 \cdot 1/3}}{2} = \begin{cases} 1/3 \\ 1, \end{cases}$
et ainsi $S = \{-1; 0\}$.

g) $3^x + 9^x = 90$
$\iff 3^{2x} + 3^x - 90 = 0$
$\iff 3^x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 90}}{2} = \begin{cases} 9 \\ -10, \end{cases}$
comme l'équation $3^x = -10$ n'admet pas de solution, on en conclut que $x = 2$ est la seule solution et ainsi $S = \{2\}$.

Exercice 6.

a) $\log_7(49) = \log_7(7^2) = 2$, $\log_7(1) = \log_7(7^0) = 0$ et $\log_7(\sqrt{7}) = \log_7(7^{1/2}) = 1/2$;

b) $\log_3(3) = \log_3(3^1) = 1$, $\log_3(\sqrt[5]{3^2}) = \log_3(3^{2/5}) = 2/5$ et $\log_3(1/81) = \log_3(3^{-4}) = -4$;

c) $\log_4(\sqrt[5]{64}) = \log_4(4^{3/5}) = 3/5$ et $\ln(\mathrm{e}^3) = \log_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^3) = 3$.

Exercice 7.

a) $\log_2(x) = 4 \iff x = 2^4 = 16$ et donc $S = \{16\}$.

b) $\log_x(264) = 4 \implies 264 = x^4 \iff x = \pm 264^{1/4}$. Mais $\log_x$ n'est défini que pour $x > 0$, donc $S = \{264^{1/4}\}$.

c) $\log_3(x) = 5 \iff x = 3^5$ et donc $S = \{243\}$.

d) $\log_x(-1000) = 3$, cette équation n'admet pas de solution car l'ensemble de définition de la fonction $\log_x$ est $\mathbb{R}_+^*$ et donc $S = \emptyset$.

e) $\log_{27}(x) = -2/3 \iff x = 27^{-2/3} = 1/9$ et donc $S = \{1/9\}$.

f) $\ln(x^2) = 100 \iff x^2 = \mathrm{e}^{100} \iff x = \pm\mathrm{e}^{50}$ et donc $S = \{\pm\mathrm{e}^{50}\}$.

Exercice 8. Pour la première équation on a $x = \log_2(100) \cong 6.6439$ et pour la seconde on a $x^2 = \log_2(100)$ et donc $x \cong \pm 2.5776$.

Exercice 9. On a $x - x\ln(x) = 0 \iff x(1 - \ln(x)) = 0$. Mais $x = 0$ n'est pas solution, car $\ln(0)$ n'est pas défini ; il reste à résoudre $\ln(x) = 1$, c'est-à-dire $x = \mathrm{e}$. D'où $S = \{\mathrm{e}\}$.

Exercice 10. $\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{b^2}c}{\sqrt[5]{d^4}}\right) = \log_a\left(a^2\sqrt[3]{b^2}c\right) - \log_a\left(\sqrt[5]{d^4}\right) = \log_a(a^2) + \log_a(\sqrt[3]{b^2}) + \log_a(c) - \log_a(d^{4/5}) = 2 + \dfrac{2}{3}\log_a(b) + \log_a(c) - \dfrac{4}{5}\log_a(d)$.

Exercice 11. $\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}(16) + 2\mathrm{Log}(3) - 2\mathrm{Log}(2) - \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}(9) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{16\cdot 3^2}{2^2\cdot\sqrt{9}}\right) = \mathrm{Log}(12)$. On a $\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}(12)$ et donc $S = \{12\}$ par injectivité de $\mathrm{Log} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (la fonction est bijective, mais l'injectivité suffit ici).

Exercice 12. Montrons que cette limite vaut $-\infty$. Soit $C > 0$ et posons $\delta = \mathrm{e}^{-C}$. Quel que soit x avec $0 < x < \delta$, on a $x < \mathrm{e}^{-C} \iff \ln(x) < -C$ (parce que ln et $\exp_{\mathrm{e}}$ sont des fonctions réciproques, et de plus toutes deux strictement croissantes). Par définition, ceci signifie que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$.

Exercice 13.

a) $1 = a^0 = \exp_a(0)$ et donc $\log_a(1) = 0$;

b) $a = a^1 = \exp_a(1)$ et donc $\log_a(a) = 1$;

c) $x\cdot y = a^{\log_a(x)}\cdot a^{\log_a(y)} = a^{(\log_a(x)+\log_a(y))}$ et donc $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

d) $x^m = \left(a^{\log_a(x)}\right)^m = a^{m\log_a(x)}$ et donc $\log_a(x^m) = m\log_a(x)$;

e) $\frac{1}{x} = x^{-1}$, ainsi $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(x^{-1}) \overset{\textbf{d)}}{=} -\log_a(x)$;

f) $\frac{x}{y} = x\cdot y^{-1}$, ainsi $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x\cdot y^{-1}) \overset{\textbf{c)}}{=} \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) \overset{\textbf{d)}}{=} \log_a(x) - \log_a(y)$.

Exercice 14. Posons $L = \log_a(x)$, ce qui signifie que $x = a^L$. Ainsi $\log_c(x) = \log_c(a^L) = L\cdot\log_c(a) = \log_a(x)\cdot\log_c(a)$ et donc $\log_a(x) = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(a)}$. En prenant $c = \mathrm{e}$, on a le résultat avec les logarithmes naturels.

Exercice 15.

a) À l'aide des formules de transformation des logarithmes, on obtient

$$\begin{aligned}
\log_2((3x-4)(10x-4)) &= \log_2((5x-2)^2) \\
2(3x-4)(5x-2) - (5x-2)^2 &= 0 && \text{(car } \log_2 \text{ est injective)} \\
((6x-8)-(5x-2))(5x-2) &= 0 \\
(x-6)(5x-2) &= 0
\end{aligned}$$

Les deux solutions de cette dernière équation sont $x = \frac{2}{5}$ et $x = 6$. Mais en remplaçant $x = \frac{2}{5}$ dans l'équation d'origine, on obtient un $\log_2(0)$ qui n'est pas défini. Pour $x = 6$ par contre, tous les arguments des $\log_2$ sont bien strictement positifs, donc $S = \{6\}$.

Les valeurs pour x obtenues dans un premier temps ne sont pas toutes des solutions de l'équation de départ parce que les formules de transformation des logarithmes ne sont valables que lorsque tous les arguments sont dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas nécessairement le cas ici. Comme les arguments ne sont pas connus au début de la résolution, il faut vérifier que l'utilisation des formules était bien légitime une fois la résolution terminée.

Dans une autre situation, le problème aurait pu survenir sans l'utilisation des formules : par exemple, avec $\ln(2x) = \ln(x-1)$ on obtient $2x = x - 1$ et donc $x = -1$, une valeur pour laquelle aucun des logarithmes de l'équation de départ n'est définie.

b) Pour éviter la formule des logarithmes avec la division, récrivons l'équation (opération non obligatoire), puis résolvons :

$$\begin{aligned} \ln(2x-3) + \ln(3x+10) &= 4\ln(2) \\ \ln((2x-3)(3x+10)) &= \ln(2^4) \\ 6x^2 + 11x - 46 &= 0 && \text{(car ln est injective)} \\ (x-2)(6x+23) &= 0 \end{aligned}$$

Dont les solutions sont $x = 2$ et $x = -\frac{23}{6}$. Mais $x = -\frac{23}{6}$ donne un argument négatif dans $\ln(2x-3)$, alors que $x = 2$ ne pose pas de problème dans l'équation de départ. Donc $S = \{2\}$.

Exercice 16. Une idée est de prendre un logarithme, par exemple le logarithme en base e, de chaque côté de l'égalité, et d'exploiter la formules des puissances :

$$\begin{aligned} \ln\left(3^{2x+1}\right) &= \ln\left(2^{x-4}\right) \\ (2x+1)\ln(3) &= (x-4)\ln(2) \\ (2\ln(3) - \ln(2))x &= -(\ln(3) + 4\ln(2)) \\ x &= -\frac{\ln(3) + 4\ln(2)}{2\ln(3) - \ln(2)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x = -\frac{\ln\left(3\cdot 2^4\right)}{\ln(3^2/2)} = \frac{\ln(48)}{\ln(2/9)} = \log_{2/9}(48)$ grâce à la formule de changement de base, donc $S = \{\log_{2/9}(48)\}$.