Série 29

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel V_1, la droite réelle. Détermine toutes les bases de V_1.

Exercice 2. Systèmes de générateurs. Détermine si les vecteurs suivants de V_n forment un système de générateurs.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Bases. Dans chacun des cas suivants, détermine si le vecteur nul est une combinaison linéaire *non triviale* (c'est-à-dire dont au moins un des coefficients est non-nul) des vecteurs donnés. Ces vecteurs forment-ils alors une base $\mathcal{B} = (\vec{v_1}; \dots ; \vec{v_n})$ de V_n ?

a) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

c) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

d) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$;

e) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

f) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Indication : Pour **c)**, calcule les différences de deux des trois vecteurs.

Exercice 4. Démontre que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ de V_3 sont coplanaires.

Exercice 5. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) Une base de V_3 forme aussi une base de V_2.

b) Si $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de V_2, alors pour tout vecteur $\vec{w}$ de V_2, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment un système de générateurs.

c) Le vecteur nul ne fait jamais partie d'une base.

d) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_2. Il existe toujours une base de V_2 dont $\vec{w}$ fait partie.

e) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_2 non nul. Il existe toujours une base de V_2 dont $\vec{w}$ fait partie.

f) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_3. Il existe toujours une base de V_3 dont $\vec{w}$ fait partie.

g) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_3 non nul. Il existe toujours une base de V_3 dont $\vec{w}$ fait partie.

$*$ **Exercice 6. Indépendance linéaire et déterminants.**

a) Retrouve dans ton cours la définition du déterminant d'une matrice 2×2 et 3×3.

b) On considère deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de V_2. Montre que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant $\det(\vec{u};\vec{v})$ de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est non nul. Conclus que pour $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$,

$$\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0 \iff \mathcal{B} = (\vec{u};\vec{v}) \text{ est une base de } V_2.$$

c) On considère trois vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ de V_3. Montre que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ de la matrice $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est non nul. Conclus que pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$,

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0 \iff \mathcal{B} = (\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \text{ est une base de } V_3.$$

Exercice 7. On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les points $A = (5;0;0)$, $B = (0;0;7)$, $C = (2;2;2)$, $D = (1;1;1)$ et $E = (1;2;3)$.

On travaille avec la base $\mathcal{B} = (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ de V_3 formée des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontre qu'il s'agit bien d'une base.

b) Calcule les composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.

c) Dessine dans V_3, en perspective cavalière, les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 8. Exprime le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. On se donne les vecteurs $\vec{a} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Résous l'équation suivante littéralement, puis calcule les composantes de la solution :

$$\tfrac{3}{4}\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{a} = \tfrac{9}{10}\left(\tfrac{1}{12}\vec{x} + \tfrac{5}{3}\vec{b}\right) - 2\vec{a}$$

Exercice 10. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 2m+3 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

$$\begin{pmatrix} 9m \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 8 \\ m^2 \\ m \end{pmatrix}$$