Série 31

Pour le 19 juin 2024

Exercice 1

Inversion de cercles tangents. Décris l'image par l'inversion de pôle C et de cercle d'inversion Γ de deux cercles tangents dans chacun des cas suivants. Illustre ton propos d'un dessin et explique les raisons du résultat dans chacun des cas.

a) Les deux cercles passent par le pôle d'inversion et sont tous deux tangents au cercle d'inversion.

b) Les deux cercles passent tous deux par C, et leurs diamètres sont supérieurs au rayon de Γ.

c) Les deux cercles passent tous deux par C, et leurs diamètres sont inférieurs au rayon de Γ.

d) L'un des cercles passe par C, l'autre non. Tous deux sont intérieurs au cercle d'inversion.

e) Les deux cercles sont extérieurs au cercle d'inversion.

Exercice 2

Angles. On considère un cercle de centre $(0;0)$ et de rayon 1 et une courbe $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Calcule dans chacun des cas suivants l'angle formé par le cercle et c en leur(s) point(s) d'intersection.

a) $c(t) = 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

b) $c(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

c) $c(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

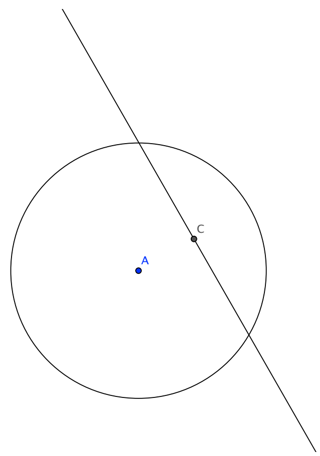
d) $c(t) = 1/2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

e) $c(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

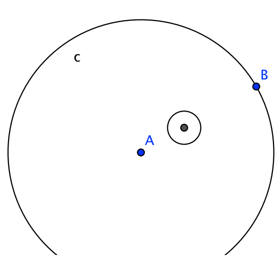
Exercice 3

Inversions.

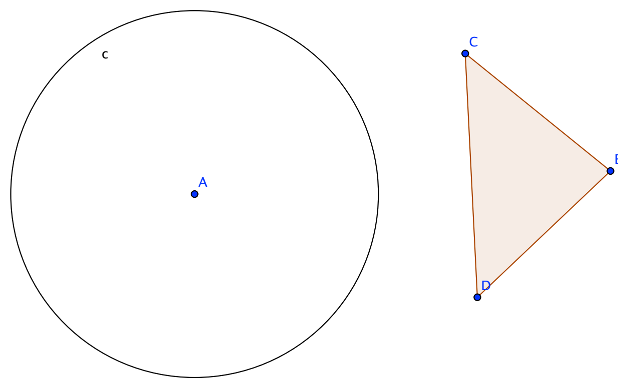
a) Construis à la règle et au compas l'inverse de la droite donnée par rapport au cercle donné. Donne une marche à suivre ($||AC||$ est un demi-rayon).



b) Construis à la règle et au compas l'inverse du petit cercle donné par rapport au grand cercle donné. Donne une marche à suivre (le diamètre du petit-cercle est un quart de rayon).



c) Construis à la règle et au compas l'inverse du triangle donné par rapport au cercle donné. Donne une marche à suivre (utilise des points des droites supportant les côtés du triangle dont les inverses sont facile à construire !).



Exercice 4

Forme analytique des inversions. On considère l'inversion ι par rapport au cercle de centre $O = (0;0)$ et de rayon r.

a) Soit $P = (x;y)$ un point du plan. Quels sont les coordonnées de $\iota(P)$?

b) Donne une interprétation géométrique (en termes d'inversion bien sûr !) à l'application définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

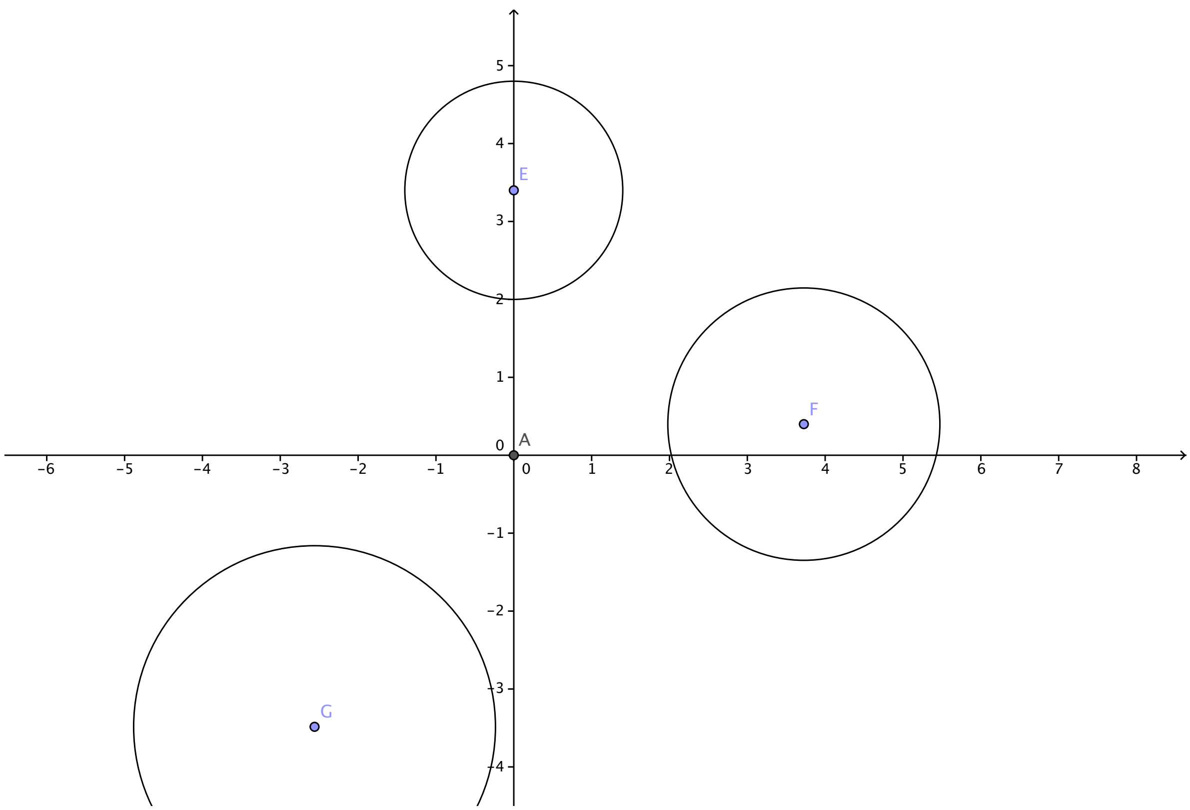
c) On considère la composition $h = \iota' \circ \iota$ de deux inversions, où ι' est l'inversion de pôle O et de cercle d'inversion de rayon R. Calcule $h(x,y)$ analytiquement.

d) Décris h géométriquement.

e) Déduis de cet exercice que les homothéties préservent les angles !

Exercice 5

Problème d'Appolonius. Résous le problème d'Appolonius dans la situation suivante (arrange-toi pour construire un cercle d'inversion qui coupe les cercles à inverser de sorte que leurs images soit plus facile à construire) :



Exercice 6

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Soit Γ un cercle. Un cercle dont le centre se trouve sur Γ ne coupe jamais Γ en un angle droit.

b) Deux cercles de même rayon ne peuvent pas se couper en un angle de $\pi/3$.

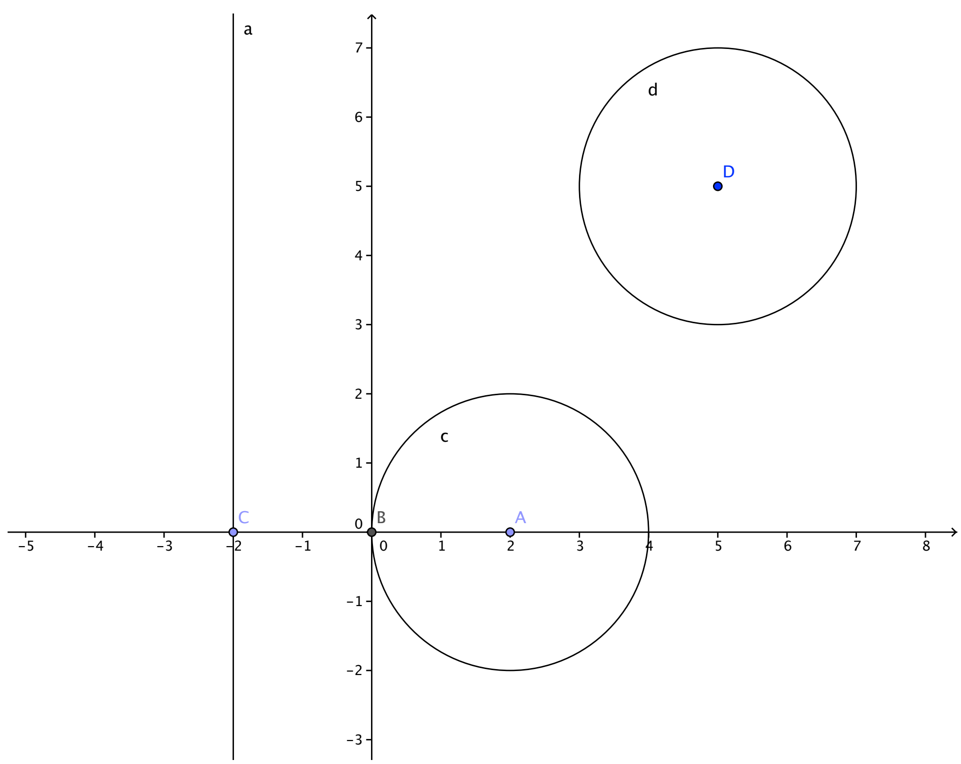
c) L'inversion du cercle inscrit d'un triangle est un cercle circonscrit au triangle image.

d) Les inverses de deux cercles concentriques sont deux cercles concentriques.

e) Les inverses de deux cercles concentriques ne sont jamais deux cercles concentriques.

Exercice 7

Résous le problème d'Apollonius dans le cas suivant (on cherche donc un cercle tangent simultanément à la droite a et aux cercles c et d :



Exercice 8

Existe-t-il une situation pour laquelle le problème d'Apollonius n'a pas de solution ? Si oui, laquelle ?

Exercices théoriques

Exercice 9

La projection stéréographique. On pose une sphère S^2 sur un plan horizontal $\mathcal{H}$, si bien qu'elle lui est tangente en son pôle sud S. La projection stéréographique p est la projection centrale de la sphère sur le plan à partir de son pôle nord N. Ainsi pour un point X de la sphère (avec $X \neq N$) l'image $p(X)$ est le point d'intersection de la droite NX avec le plan horizontal.

a) Dessine une illustration soignée de la situation.

b) Montre que p définit une bijection $p : S^2 - \{N\} \to \mathcal{H}$ de la sphère privée de son pôle nord avec le plan $\mathcal{H}$.

c) Définis ce qu'est une inversion dans l'espace de pôle N et de sphère d'inversion Σ.

d) Dans le cas où le pôle d'inversion est N et Σ est la sphère d'inversion de centre N est de rayon $[NS]$, montre que la restriction de l'inversion à la sphère S^2 est précisément la projection stéréographique.

e) Montre que la projection stéréographique transforme les cercles de S^2 passant par N en des droites.

f) Montre que la projection stéréographique transforme les cercles de S^2 ne passant pas par N en des cercles.