Série 28

Pour le 22 mai 2024

Exercice 1

Kepler a découvert en 1610 que l'orbite de la Terre est une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers. On sait que le demi-grand axe mesure environ 150 millions de kilomètres (une unité de mesure connue sous le nom d'*unité astronomique*) et que l'excentricité vaut $e = 1/60$. Calcule les distances minimales et maximales entre la Terre et le Soleil, puis calcule aussi la distance entre les deux foyers.

Exercice 2

On considère les coniques d'équation $4x^2 + y^2 - 48x - 2y + 129 = 0$ et $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$. Détermine de quelles coniques il s'agit (parabole, hyperbole, ellipse ?) et calcule leur(s) point(s) d'intersection.

Exercice 3

Trouve les coordonnées des sommets et des foyers de la courbe d'équation $25x^2 + y^2 = 25$.

Exercice 4

Trouve les coordonnées des sommets et des foyers de la courbe d'équation

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

Exercice 5

Trouve l'équation de la parabole de sommet $(5; -2)$ et de directrice $y = -5$ et celle de foyer $(3; 5)$ et de sommet $(3; 1)$.

Exercice 6

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) On considère la famille de toutes les ellipses de foyer F et de directrice d. Lorsque l'excentricité tend vers 1, l'ellipse tend vers une parabole.

b) On considère la famille de toutes les ellipses de foyer F et de directrice d. Lorsque l'excentricité tend vers 0, l'ellipse tend vers un cercle.

c) On considère la famille de toutes les ellipses de foyers F et F' et de grand axe $2a$. Lorsque $2a$ tend vers $\delta(F, F')$, l'ellipse tend vers un cercle.

d) On considère la famille de toutes les ellipses de foyers F et F' et de grand axe $2a$. Lorsque F tend vers F', l'ellipse tend vers un cercle.

e) La trajectoire d'une comète autour du soleil décrit soit une ellipse, soit une parabole.

Exercice 7

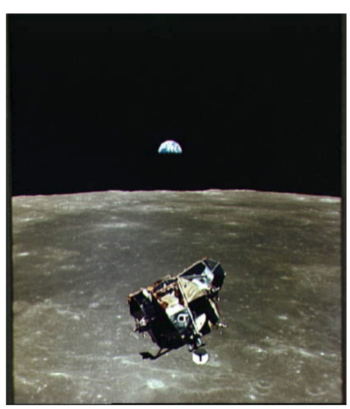
On considère le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{3x-6}$. Effectue une étude de fonction rapide (asymptotes et croissance) afin de pouvoir tracer le graphe et déterminer la forme de la courbe (est-ce une ellipse, une parabole, une hyperbole, une exponentielle, autre chose ?).

Exercice 8

Un lapin se trouve dans un pré et aperçoit une carotte à une certaine distance (disons au point C). Il a faim. D'autre part il y a une rivière rectiligne qui traverse le pré (disons que sa rive trace une droite r). Le lapin a soif. Si la rivière est plus proche que la carotte, le lapin va préférer boire, si la carotte est plus proche que la rivière, il va préférer manger. Où se trouvent les points du pré où le lapin ne sait pas quoi faire ? Illustre ta réponse.

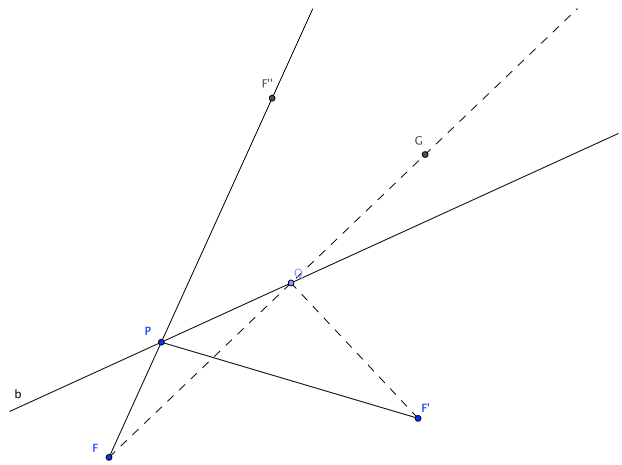
Exercice 9

En 1969, le module de commande d'Apollo 11 est placé en orbite elliptique autour de la Lune. Le point de cette orbite le plus proche de la lune, la périlune, se trouvait à 110 km d'altitude, alors que l'apolune se trouvait à 314 km d'altitude (au-dessus de la Lune). Sachant que le rayon de la Lune mesure 1728 km et que le centre de la lune se trouvait en l'un des foyers de cette orbite, calcule l'équation de cette ellipse.



Exercice 10

Considérons un triangle $\Delta FPF'$. On reporte sur la demi-droite $[FP$ un point F'' de sorte que $|PF''| = |PF'|$. On trace ensuite la bissecrice b de l'angle $\widehat{F''PF'}$ et on choisit un point Q sur b, $Q \neq P$. Soit G le point sur la demi-droite $[FQ$ tel que $|QF'| = |QG|$.

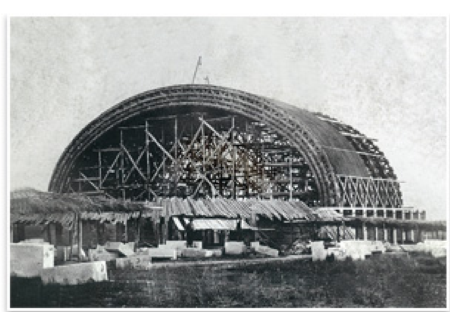


a) Montre que le triangle $\Delta FF''G$ n'est jamais isocèle en F. Pour cela, tu pourras observer le segment $[QF'']$.

b) Si F et F' sont les foyers d'une ellipse à laquelle appartient le point P, déduis de la partie précédente que Q n'appartient pas à cette ellipse (par exemple par l'absurde).

c) Démontre que la bissectrice b est tangente à l'ellipse décrite au point précédent.

d) Démontre la propriété "acoustique" de l'ellipse : Lorsqu'une personne se trouve au foyer d'une salle de plafond elliptique (comme le Mormon Tabernacle Choir à Salt Lake City illustré ci-dessous) et qu'elle prononce quelques mots à voix basse dans *quelque direction que ce soit*, une autre personne se trouvant au deuxième foyer l'entendra clairement.



Exercices théoriques

Exercice 11

Les ellipses. Soit F un point du plan et d une droite ne passant pas par F. On travaille avec l'ellipse donnée comme lieu géométrique des points P tels que $\delta(P, F) = e\delta(P, d)$ où e est un nombre réel fixé entre 0 et 1.

a) Montre que l'ellipse est un lieu géométrique "borné", c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel R tel que $\delta(P, F) < R$ pour tout point P de l'ellipse.

b) Montre que l'ellipse admet deux axes de symétrie, l'un orthogonal à d, l'autre parallèle. Pour ce faire, tu peux supposer que la droite d est verticale.

c) Explique comment construire le centre de l'ellipse, c'est-à-dire l'intersection des axes de symétrie.

d) A partir d'ici on peut supposer que l'ellipse est centrée en l'origine et que ses axes sont les axes Ox et Oy. Montre que la somme des distances d'un point de l'ellipse aux foyers est constante (c'est la caractérisation bifocale : $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$).

e) Trouve une expression paramétrique de l'ellipse centrée en $(0; 0)$ de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$.