

Série 27

Pour le 15 mai 2024

Exercice 1

Le plan dans l'espace I. Détermine l'équation des plans suivants sachant que :

1. il passe par le point $A = (3; 4; 5)$ et deux vecteurs directeurs sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. il passe par les points $A = (-3; 2; 7)$, $B = (-2; 2; 7)$ et $C = (-3; 2; 8)$;
3. il passe par l'origine et les points $(2; 4; -6)$ et $(3; 4; -5)$.

Exercice 2

Le plan dans l'espace II. On se donne six points dans l'espace $A = (1; 4; 1)$, $B = (-2; -8; 3)$, $C = (-5; -11; 5)$, $P = (3; 5; -1)$, $Q = (3; -11; -1)$ et $R = (0; -3; 1)$. Montre que les plans ABC et PQR sont parallèles.

Exercice 3

Les traces d'une droite. Les traces d'une droite sont les intersections de cette droite avec les plans Oxy , Oyz et Oxz . Détermine les traces de la droite d donnée sous forme paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Deux droites. Les droites AB et CD données dans chacun des trois cas suivants sont-elles gauches, sécantes, parallèles ou confondues ?

1. $A = (6; 4; -4)$, $B = (4; 0; -2)$, $C = (7; 0; -2)$, $D = (11; -4; 0)$;
2. $A = (-4; 2; 1)$, $B = (-1; 1; 3)$, $C = (0; 5; -2)$, $D = (9; 2; 4)$;
3. $A = (8; 0; 3)$, $B = (-2; 4; 1)$, $C = (8; 3; -2)$, $D = (0; 0; 5)$.

Exercice 5

Une droite et un plan. Détermine dans les deux cas suivants la position relative de la droite donnée par rapport au plan :

(a) la droite $x = 3 + k; y = 5 - k; z = 3 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ et le plan $2x + y - z = 0$;

(b) la droite $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ et le plan $3x - 2y + 4z = 0$.

Exercice 6

On considère les points $O = (0; 0; 0)$, $A = (3; 0; 0)$, $B = (0; 3; 0)$, $C = (0; 0; 3)$ et $D = (1; 1; 1)$. Montre que la droite OD coupe le triangle ΔABC en son centre de gravité.

Exercice 7

Distance d'un point à un plan.

1. Calcule la distance entre le point $(3; 4; 5)$ et le plan $2x - 5y + 7z + 5 = 0$;
2. Calcule la distance entre le point $(-2; 5; 3)$ et le plan $3x - 4y + 1 = 0$.

Exercice 8

Distance entre deux droites. Calcule la distance entre les droites

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soient $A = (2; 1; 0)$ et $B = (-1; 4; 2)$. Détermine l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice 10

Angles et plans. On considère les plans \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} et \mathcal{S} données par leurs équations cartésiennes $\mathcal{P} : x + y + z = 0$, $\mathcal{Q} : -2x - 2y - 2z + 4 = 0$, $\mathcal{R} : x - z = 1$ et $\mathcal{S} : x - y - z = 1$.

- a) Calcule l'angle que forment entre eux les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} , puis \mathcal{P} et \mathcal{R} .
- b) Calcule l'équation des plans bissecteurs des plans \mathcal{P} et \mathcal{S} .
- c) Calcule l'équation des plans bissecteurs des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

Exercice 11

Position relative. On se donne une droite et un plan dans \mathbb{R}^3 . Détermine dans chacun des cas suivants si la droite est disjointe du plan, si elle le coupe en un point ou si elle est contenue dans le plan.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad 2x + y - z = 0.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{et} \quad 4x + y - 11z = 0.$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 3x - 2y + 4z = 0.$$

Exercice 12

Intersection d'une sphère et d'un plan. Déterminer le centre D et le rayon r du cercle Γ , intersection de la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 10 = 0$ et du plan $\alpha : z = 0$.

Exercices théoriques**Exercice 13**

Sphères exinscrites. On considère un tétraèdre de sommets A, B, C et D dans l'espace.

On cherche à construire des sphères tangentes simultanément aux quatre plans ABC, ABD, ACD et BCD . Explique et justifie la construction des sphères exinscrites à ce tétraèdre.

Combien y en a-t-il ?