Série 26

Pour le 8 mai 2024

Exercice 1

Associativité du produit vectoriel
On considère trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ de V_3 muni de la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, tels que

$$\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_3}, \quad \vec{b} = 3\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 7\vec{e_3} \quad \text{et} \quad \vec{c} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3}.$$

a) Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$.

b) Qu'en déduire sur l'associativité du produit vectoriel ?

c) Construire un autre exemple simple où l'un des produits vectoriels est le vecteur nul, mais l'autre pas.

Exercice 2

Anti-commutativité du produit vectoriel.

a) Démontrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_3.

b) Calculer $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3}$ et $\vec{e_3} \wedge \vec{e_2}$ où $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est la base canonique de V_3.

Exercice 3

Distributivité du produit vectoriel. Démontrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$.

Exercice 4

Le produit mixte et le volume d'un parallélépipède.
Soient trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de V_3. On construit un parallélépipède sur ces trois vecteurs et on choisit le parallélogramme construit sur $\vec{b}$ et $\vec{c}$ comme base.
On définit le *produit mixte* des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ comme suit : $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = \vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})$.

a) Calculer l'aire de la base du parallélépipède en fonction de la longueur des vecteurs et de l'angle α entre $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

b) Calculer la hauteur du parallélépipède en fonction de $\vec{a}$ et de l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$.
Dessiner une figure d'étude.

c) Calculer le volume du parallélépipède et montrer qu'il est égal à la valeur absolue du produit mixte.

d) Développer le produit mixte $[\vec{a};\vec{b};\vec{c}]$ des vecteurs donnés avec leurs composantes

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.$$

e) Montrer que $[\vec{a};\vec{b};\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

f) Déduire du calcul précédent que la valeur absolue du déterminant ci-dessus donne le volume du parallélépipède.

g) Calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

h) Calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}$.

Exercice 5

Vérifier que les points $A=(-1;-1;7)$, $B(-2;1;6)$, $C(0;1;6)$, $D(1;-1;7)$, $E(2;-2;3)$, $F(1;0;2)$, $G(3;0;2)$ et $H(4;-2;3)$ sont les sommets d'un parallélépipède et calculer son volume.

Exercice 6

Utiliser un déterminant pour décider si les points $A(1;1;3)$, $B(5;2;4)$, $C(3;-1;7)$ et $D(6;1;8)$ sont coplanaires ou non.

Exercice 7

Vérifier que les points $A(2;1;-2)$, $B(2;3;0)$, $C(6;6;5)$ et $D(6;4;3)$ sont les sommets d'un parallélogramme, puis calculer son aire à l'aide d'un produit vectoriel.

Exercice 8

Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan contenant $A(2;1;6)$, $B(-1;4;3)$ et $C(2;0;-3)$.

Exercice 9

Montrer que si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, alors $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{c}$. *Indication.* Calculer $\vec{a}\wedge(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Exercice 10

Volume du tétraèdre. On considère les points suivants de $\mathbb{R}^3$ muni d'une repère orthonormé :

$$A(2;2;3), \quad B(1;4;3), \quad C(-1;4;2) \quad \text{et} \quad D(0;1;0).$$

a) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ et $\vec{DC}$;

b) Calculer le volume du tétraèdre de sommets A, B, C et D.

c) Calculer l'aire de la surface du tétraèdre.

Exercice 11

Les diagonales d'un parallélogramme.
On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

a) Montrer que $(\vec{b}-\vec{a}) \wedge (\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{b} \wedge \vec{a}$;

b) Déduire de la partie précédente que l'aire du parallélogramme construit sur les diagonales du premier parallélogramme est le double de l'aire de celui-ci.

Exercice 12

Identité de Gibbs. Démontrer que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Exercice 13

On considère une base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'elle n'est pas directe.

a) Montrer que la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, -\vec{f_3})$ est directe.

b) Montrer que la base $(\vec{f_1}, \vec{f_3}, \vec{f_2})$ est directe.

c) Montrer que la base $(\vec{f_3}, \vec{f_1}, \vec{f_2})$ n'est pas directe.

Exercice 14

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

a) Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est non nul.

b) Le déterminant d'une matrice 3×3 est positif ou nul car il permet de calculer le volume d'un parallélépipède.

c) Si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires, alors $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{0}$.

d) Si $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires.

e) Le produit $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c}$ est un vecteur.

f) Le produit $\vec{a} \wedge (\vec{b} \bullet \vec{c})$ est un nombre.

g) Le produit $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est un vecteur.