

Nom :

Cours Euler 3ème année

3 mai 2023

Test 5 : Intégration.

Exercice 1 (20 pts)

Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (2 + x^3)\sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-5}}$

Utiliser un changement de variable à préciser.

c) $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

Décomposer en éléments simples.

d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 34}$

Compléter le carré.

Exercice 2 (22 pts)

Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_1^3 \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2} dx$

b) $\int_0^2 \frac{16x + 10}{\sqrt{1 + 5x + 4x^2}} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{14}} \sin^3(7x) \cdot \cos(7x) dx$

d) $\int_0^{\sqrt{11}} \sqrt{11 - x^2} dx$

Poser $x = \sqrt{11} \sin t$.

e) $\int_0^{\ln 3} \frac{x}{3} \cdot e^x dx$

Intégrer par partie.

Exercice 3 (5 pts)

Montrer par calcul que la longueur L de la courbe de la fonction $f(t) = \sin t$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ se situe dans l'intervalle $\left[\frac{\pi\sqrt{7}}{12}; \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right]$.

SUITE AU VERSO!

Exercice 4 (8 pts)

- Enoncer et démontrer le théorème de la moyenne.
- Enoncer le théorème fondamental du calcul intégral.

Exercice 5 (7 pts)

- Démontrer la proposition :
Si f est une fonction impaire et intégrable sur \mathbb{R} , alors ses primitives sont paires.

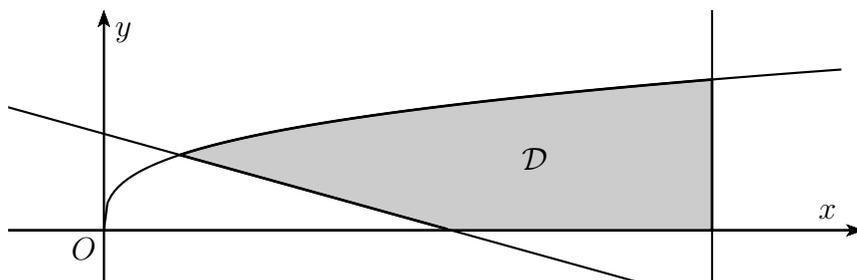
b) En déduire que
$$\int_{-a}^a \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 (8 pts)

Les graphes des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

ainsi que la droite d d'équation $x = 8$ sont représentés ci-après dans un système d'axes Oxy .



- Vérifier que les courbes de f et g se coupent au point d'abscisse 1.
- Calculer l'aire géométrique du domaine fermé \mathcal{D} compris entre les graphes de f et de g , la droite d et l'axe Ox dans le I^{er} quadrant..