

Corrigé série 24

Exercice 1 (20 points)

a) On a

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}.$$

Les primitives sont donc

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

b) On a

$$\frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} = \frac{x^3 - 6}{(x^2 + 4)(x^2 + 2)} = \frac{ax + b}{x^2 + 4} + \frac{cx + d}{x^2 + 2}.$$

En mettant au même dénominateur et en comparant, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \\ d = -3 \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples est alors

$$\begin{aligned} \frac{2x + 3}{x^2 + 4} - \frac{x + 3}{x^2 + 2} &= \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{3}{x^2 + 4} - \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{3}{x^2 + 2} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{3}{4} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Les primitives sont donc

$$\begin{aligned} &\ln(x^2 + 4) + \frac{3}{4} \cdot 2 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c \\ &= \ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c \\ &= \ln\left(\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c. \end{aligned}$$

c) On a

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}.$$

En mettant au même dénominateur et en comparant, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/3 \\ c = 2/3 \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples est alors $\frac{1}{3(x + 1)} - \frac{1}{3} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$.

Une primitive de la première partie est donnée par $\frac{1}{3} \ln|x + 1|$.

Pour la deuxième partie, on complète le carré, puis on fait le changement de variables $u = x - \frac{1}{2}$:

$$\frac{x - 2}{x^2 - x + 1} = \frac{x - 2}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{u - \frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}} = \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \frac{2u}{u^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \frac{1}{(\frac{2u}{\sqrt{3}})^2 + 1}$$

Une primitive est donc

$$\frac{1}{2} \ln \left(u^2 + \frac{3}{4} \right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right)$$

Les primitives de $\frac{1}{x^3 + 1}$ sont donc

$$\frac{1}{3} \ln(|x + 1|) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + c = \frac{\ln \left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right)}{6} + \frac{\arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{3}} + c.$$

d) On a

$$\frac{x^5}{x^3 - 1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3 - 1}$$

On peut directement trouver les primitives, qui sont

$$\frac{x^3}{3} + \frac{\ln|x^3 - 1|}{3} + c.$$

On aurait aussi pu passer par la décomposition en éléments simples, qui est

$$x^2 + \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{3(x - 1)}.$$

On obtiendrait alors les primitives

$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3} \ln(x - 1) = \frac{x^3}{3} + \frac{\ln|x^3 - 1|}{3} + c.$$

Exercice 2 (10 points)

a) La décomposition est

$$x - 2 + \frac{2}{x + 1}.$$

Ainsi, l'intégrale vaut

$$\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln(|x + 1|) \right]_0^1 = 2 \ln 2 - 1.5.$$

b) La décomposition est

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2(x - 2)}.$$

Ainsi, l'intégrale vaut

$$\left[\frac{1}{2} \ln(|x|) - \ln(|x - 1|) + \frac{1}{2} \ln(|x - 2|) \right]_{-2}^{-1} = 1.5 \ln 3 - 2.5 \ln 2.$$

c) La décomposition est

$$\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x + 1}.$$

Ainsi, l'intégrale vaut

$$[3 \ln(|x - 2|) - 2 \ln(|x + 1|)]_3^6 = 10 \ln 2 - 2 \ln 7.$$

Exercice 3 (10 points)a) On a $f'(x) = a$, donc $L(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + a^2} dx = \sqrt{1 + a^2} \int_0^1 1 dx = \sqrt{1 + a^2}$.b) On suit l'exemple 1.2 des notes de cours et on obtient $\frac{R\pi}{2}$.c) $L(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2(t)} dt = \int_0^1 \cosh(t) dt = [\sinh(t)]_0^1 = \sinh 1$.**Exercice 4** (10 points)a) Si f est une fonction réelle, alors l'expression $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ ne prend que des valeurs strictement positives. Ainsi, la longueur de la courbe sera toujours strictement positive, à part dans le cas trivial où les bornes d'intégration sont confondues.b) Faux. L'intégrale vaut 2π dans les deux cas.

c) Vrai.

d) Faux. L'écriture correcte est $1 - \frac{2}{1+x}$.

e) Vrai.

f) Vrai.

Exercice 5 (10 points)

a) Avec le changement de variables $\varphi(t) = \ln(t)$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{2 \cosh x + 2 \sinh x + 1} dx = \int_1^e \frac{1}{\frac{t^2+1}{t} + \frac{t^2-1}{t} + 1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{2t^2 + t} dt.$$

Avec la décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{1}{2t^2 + t} = \frac{1}{t} - \frac{2}{2t + 1}.$$

L'intégrale est donc égale à

$$(\ln t)|_1^e - (\ln(2t + 1))|_1^e = 1 + \ln(3) - \ln(2e + 1).$$

b) Avec le changement de variables $\varphi(t) = 1 + \sin(t)$, on a

$$\int_1^2 \frac{1}{1 + \sqrt{2x - x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \sin(t)^2}} \cdot \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} \cdot \cos(t) dt.$$

En utilisant ensuite le changement de variables $\varphi(s) = 2 \arctan(s)$, on remarque que $\cos(t)$ se transforme en $\frac{1 - s^2}{1 + s^2}$, donc l'intégrale est égale à

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1-s^2}{1+s^2}} \cdot \frac{1-s^2}{1+s^2} \cdot \frac{2}{1+s^2} ds &= \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+s^2} ds = \int_0^1 -1 + \frac{2}{1+s^2} ds \\ &= (-s)|_0^1 + (2 \arctan(s))|_0^1 = -1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6 (10 points)

a) En utilisant que $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ et l'intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^x t \sin^2(t) dt &= \int_0^x t \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \int_0^x \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^x t \cos(2t) dt \\ &= \left(\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_0^x - \frac{1}{2} \left(\left(t \cdot \frac{1}{2} \sin(2t)\right)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{1}{2} \sin(2t) dt \right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \int_0^x \sin(2t) dt \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos(2t)\right)\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin(2x) - \frac{1}{8} \cos(2x) + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{8}(1 - 2 \sin^2(x)) + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \sin(x) \cos(x) + \frac{1}{4} \sin^2(x) \end{aligned}$$

b) Avec le changement de variables $s = \sqrt{t+1}$, on trouve $\varphi(s) = t = s^2 - 1$, $\varphi'(s) = 2s$ et si $t \in [0; x]$, alors $s \in [1; \sqrt{x+1}]$. On a donc, en faisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\sqrt{t+1}} dt &= \int_1^{\sqrt{x+1}} e^s \cdot 2s ds = (2s \cdot e^s) \Big|_1^{\sqrt{x+1}} - \int_1^{\sqrt{x+1}} 2e^s ds \\ &= (2s \cdot e^s - 2e^s) \Big|_1^{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} - (2e - 2e) \\ &= 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1} - 1) \end{aligned}$$

c) Avec le changement de variables $s = \tan \frac{t}{2}$, on trouve $\varphi(s) = t = 2\arctan(s)$, $\varphi'(s) = \frac{2}{s^2+1}$ et si $t \in [0; x]$, alors $s \in [0; \tan(\frac{x}{2})]$. De plus, on remarque que $\cos(t)$ se transforme en $\frac{1-s^2}{1+s^2}$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{2 + \cos(t)} dt &= \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{2 + \frac{1-s^2}{1+s^2}} \cdot \frac{2}{s^2+1} ds = \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{\frac{3+s^2}{1+s^2}} \cdot \frac{2}{s^2+1} ds \\ &= \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2}{3+s^2} ds = \frac{2}{3} \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{(\frac{s}{\sqrt{3}})^2 + 1} ds = \frac{2}{3} \left(\sqrt{3} \arctan \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) \Big|_0^{\tan(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Exercice 7 (10 points)

a) Si $d > b$, on a

$$\int_a^b \frac{1}{x-d} dx = (\ln(d-x)) \Big|_a^b = \ln \frac{d-b}{d-a}.$$

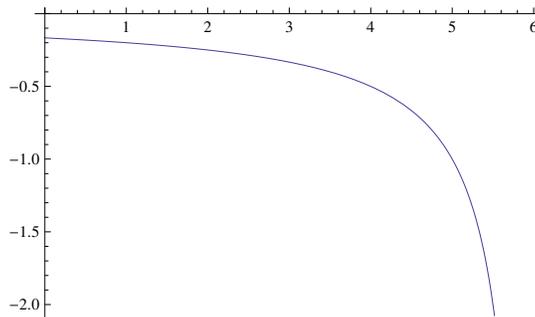
Pour $d < a$, on trouve la même réponse.

b) On calcule, pour $n \geq 2$,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-d)^n} dx = \left(\frac{(x-d)^{1-n}}{1-n} \right) \Big|_a^b = \frac{(b-d)^{1-n} - (a-d)^{1-n}}{1-n}.$$

c) On représente la situation à la page suivante. On doit trouver

$$-\ln(1+e).$$



Exercice 8 (10 points)

a) On a

$$\overrightarrow{\varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}) \\ \varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\left\| \overrightarrow{\varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)} \right\|^2 = (\varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}))^2 + (\varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}))^2.$$

b) On applique le théorème des accroissements finis pour obtenir l'existence de c_i et de d_i tels que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}) &= \frac{b-a}{n} \varphi_1'(c_i), \quad \text{et} \\ \varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}) &= \frac{b-a}{n} \varphi_2'(d_i). \end{aligned}$$

La propriété suit alors directement en utilisant ces deux équations et l'égalité obtenue plus haut.

c) La fonction $f(t)$ est intégrable sur $[a, b]$ car elle est continue sur cet intervalle.

d) Cela découle des points précédents.

e) On trouve bien évidemment $2\pi r$.

f) On calcule

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \sin(2t) dt = 6.$$

g) On calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} |2 \cos(t/2)| dt = 4 \int_0^{\pi} \cos(t/2) dt = 8 (\sin(t/2)) \Big|_0^{\pi} = 8.$$

