Exercice 1.

a) Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$. Si $x < 0$, alors

$$1 - x = x \cdot \left(\tfrac{1}{x} - 1\right) \geq x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \geq x \cdot \tfrac{1}{x} = 1$$

et par le Théorème des deux gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^-} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$. De la même manière, si $x > 0$, alors

$$1 - x \leq x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq 1$$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$. Comme les limites à gauche et à droite sont les mêmes, on conclut $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$.

b) Le même raisonnement qu'au point précédent s'applique à $x \cdot \lfloor \frac{2}{x} \rfloor$ pour prouver

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor = 2$$

On peut donc écrire

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \left(\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor\right) = \lim_{x \to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + x \cdot \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor = \lim_{x \to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + \lim_{x \to 0} x \cdot \lfloor \tfrac{2}{x} \rfloor = 1 + 2 = 3.$$

Exercice 2.

a) Comme dans la démonstration de la convergence des suites rationnelles, on a pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^m}}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ (démontré dans une série précédente), et que la limite d'un produit est le produit des limites (si celles-ci existent), on a pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} k \tfrac{1}{x^d} = k \left(\lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{1}{x} \right)^d = 0$$

De plus, comme la limite d'un quotient est le quotient des limites (si celles-ci existent), et que la limite d'une somme est la somme des limites (si celles-ci existent), on peut conclure

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} x^{n-m}$$

Le résultat énoncé découle en distinguant les trois cas : $n < m$, $n = m$, et $n > m$. Lorsque x tend vers $-\infty$, il faut tenir compte d'un changement possible de signe lorsque $n > m$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot (-1)^{n-m} \cdot \infty & \text{si } n > m, \end{cases}$$

b) Soit $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ une fonction rationnelle donnée comme en **a)**. On rappelle que de l'égalité fondamentale de la division euclidienne de $a(x)$ par $b(x)$, il suit $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$ où $q(x)$ est le quotient, et le degré du reste $r(x)$ est strictement inférieur au le degré de $b(x)$. On avait aussi défini $\delta(x) = \frac{r(x)}{b(x)}$.

- Si f admet une asymptote oblique au "sens des fonctions rationnelles", alors $f(x) = px + o + \delta(x)$ et

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (px + o) = \lim_{x \to \pm\infty} \delta(x) = 0$$

par la partie **a)** de cet exercice. La droite $y = px + o$ est donc bien une asymptote oblique au sens de la définition par les limites.

- Supposons maintenant que f, donnée par $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$, admet une asymptote oblique $y = px + o$ au sens de la définition par les limites. Exploitons la proposition traitant du calcul des asymptotes obliques. Si $p \neq 0$, l'égalité $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = p$ implique par **a)** que le degré du numérateur $a(x)$ est nécessairement égal au degré de $x \cdot b(x)$ (c'est-à-dire $\deg(a) = \deg(b) + 1$), et que $\frac{a_n}{b_m} = p$; si $p = 0$, alors $\deg(a) \leq \deg(b)$. En d'autres termes, $q(x) = px + k$ (avec p éventuellement nul). Comme la limite d'une somme est la somme des limites (si celles-ci existent), l'égalité $\lim\limits_{x \to \pm\infty}(f(x) - px) = o$ implique $k = o$, c'est-à-dire $q(x) = px + o$.

Exercice 3.

a)
- Dans la démonstration de $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ du cours, nous avons vu (en comparant des aires de triangles) que si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, alors en particulier, $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$. De même, dans le cercle trigonométrique, on observe que la longueur d'arc $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ est plus grande que la longueur de sa projection $\sin(t)$ sur l'axe vertical : $\sin(t) \leq t$, d'où l'on tire $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ en divisant par $t > 0$.
- Des considérations similaires dans le cercle trigonométrique, en prenant garde au signe de $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ et au sens des inégalités, donnent aussi $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$. Dans ce cas, $\sin(t) \geq t$ (car $t < 0$) donne $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ après division par t.

Dans les deux cas, on a bien $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$.

b)
- Si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, des inégalités de **a)** on déduit $\frac{1}{t} \cdot (\cos(t) - 1) \geq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \geq \frac{1}{t} \cdot (1 - 1) = 0$.
- Si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient $\frac{1}{t} \cdot (\cos(t) - 1) \leq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \leq \frac{1}{t} \cdot (1 - 1) = 0$.

c) Dans les deux cas précédents, on amplifie l'expression de gauche par $\cos(t) + 1$ pour pouvoir conclure.
- En effet, si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, alors
$$\frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\sin^2(t)}{\cos(t) + 1}\right) \geq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \geq 0$$
Comme $\lim\limits_{t \to 0^-} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\sin^2(t)}{1+\cos(t)}\right) = \lim\limits_{t \to 0^-} -\frac{\sin(t)}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}\right) = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0$, on obtient $\lim\limits_{t \to 0^-} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$ par les 2 gendarmes.
- Si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, les inégalités
$$\frac{1}{t} \cdot \left(\frac{-\sin^2(t)}{\cos(t) + 1}\right) \leq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \leq 0$$
permettent de conclure comme avant $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$.

On a finalement montré $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$.

Exercice 4.

a)
- **Domaine.** Pour que la fonction soit définie, il faut que le dénominateur soit non nul : $x \neq 0$, donc $D(a) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Limites.** En $x = 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} x + \dfrac{\sin(x)}{x} = 0 + 1 = 1$. La fonction possède donc un "trou" en $(0; 1)$.
- **Asymptotes.** Par le calcul précédent, il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 0$. Pour l'asymptote oblique, on calcule
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x^2} = 1 + 0 = 1$$
et
$$\lim_{x \to \pm\infty}(a(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$
par le Théorème des deux gendarmes pour les fonctions. Donc $y = x$ est l'asymptote oblique (à gauche et à droite).
- **Parité.** Comme l'asymptote oblique n'est pas symétrique par rapport à Oy, la fonction n'est pas paire. De plus, $a\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$ et $-a\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$, la fonction n'est pas impaire non plus.
Alternativement, la somme d'une fonction impaire (non nulle) et d'une fonction paire (non nulle) — car quotient de deux fonctions impaires — n'est ni paire ni impaire.

b)
- **Domaine.** La fonction est définie partout, donc $D(b) = \mathbb{R}$.

- **Limites.** Il n'y a pas de valeur interdite, donc pas de trou.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour l'asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1 + 0 = 1$$

par le Théorème des deux gendarmes. Par contre, les limites vers $-\infty$ ou $+\infty$ de $b(x) - x = \sin(x)$ n'existent pas (par exemple, les suites données par $x_n = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ et $y_n = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$ tendent toutes deux vers $+\infty$, mais leurs images par b tendent respectivement vers 1 et -1).
La fonction ne possède donc pas d'asymptote oblique (ni à gauche, ni à droite).
- **Parité.** La somme de deux fonctions impaire est impaire (on a bien $b(-x) = -b(x)$).

c)
- **Domaine.** Pour éviter une "division par 0", $D(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Limites.** Comme $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en $x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} 10x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ par le Théorème des deux gendarmes pour les fonctions. La fonction possède donc un "trou" en $(0; 0)$.
- **Asymptotes.** Pas d'asymptote verticale pour cette fonction par le calcul précédent. Pour l'asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

(au besoin, on peut se convaincre de ce résultat par le Théorème des deux gendarmes, puisque pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, on a $t \leq \sin(t) \leq -t$, c'est-à-dire pour $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{\pi}\right[$, on a $\frac{1}{x} \leq \sin(t) \leq -\frac{1}{x}$, et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$). De plus, par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = \lim_{t\to 0^-} 10 \cdot \frac{\sin(t)}{t} = 10$$

La droite $y = 10$ est donc asymptote horizontale à gauche pour c. Les calculs pour $x \to +\infty$ sont similaires, et on trouve que $y = 10$ est aussi asymptote horizontale à droite.
- **Parité.** Comme $c(-x) = c(x)$, la fonction est paire.

d)
- **Domaine.** Pour éviter une "division par 0", $D(d) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Limites.** En raisonnant comme en **c)**, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, et cette fonction possède aussi un "trou" en $(0; 0)$.
- **Asymptotes.** Pas d'asymptote verticale pour cette fonction par le calcul précédent. Pour l'asymptote oblique,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

par le même changement de variable $t = \frac{1}{x}$ qu'en **c)**. De même,

$$\lim_{x\to\pm\infty} d(x) - x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) = 0$$

par l'exercice précédent, et $y = x$ est asymptote oblique pour d.
- **Parité.** Comme $d(-x) = -d(x)$, la fonction est impaire.