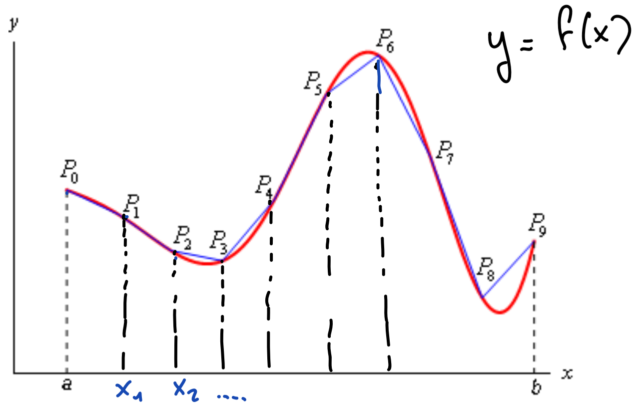
IV. Longueur d'une courbe et fractions rationnelles

Notre but aujourd'hui est de découvrir comment le calcul intégral, que nous avons développé pour calculer l'aire d'une surface, permet en fait aussi de calculer la longueur d'une courbe (et le volume de certains solides comme nous le verrons la semaine prochaine). Nous aborderons ensuite la question de l'intégration des fractions rationnelles. Les fonctions polynomiales admettent des primitives simples et nous verrons qu'il est possible de donner un algorithme pour intégrer toute fonction rationnelle (mais pas une formule générale).

1 La longueur d'une courbe

Considérons une fonction réelle continûment dérivable au voisinage de $[a, b]$ (pour que nous soyons sûrs que la dérivée aux bornes a et b existe bien). Nous aimerions mesurer la longueur du graphe de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. L'idée n'est plus originale : on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n "petits" morceaux $[x_{i-1}, x_i]$ (nous utilisons la subdivision régulière d'ordre n de sorte que la longueur de chacun de ces petits intervalles vaut $(b-a)/n$) et on approxime chaque portion du graphe comprise entre les points d'abscisse x_{i-1} et x_i par un segment :



$P_0(a ; f(a))$
$= (x_0 ; f(x_0))$

La longueur du segment d'extrémités $P_{i-1}\left(x_{i-1}\,;\,f(x_{i-1})\right)$ et $P_i\left(x_i\,;\,f(x_i)\right)$

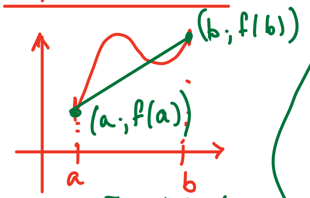
vaut $\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$

$$= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \frac{\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}$$

$$= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$$ par le thm des accroissements finis.

Rappel thm AF



$\exists c \in [a;b]$ t.q. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Par conséquent, la longueur totale de la "ligne polygonale brisée" est égale à $L_n = \ell_1 + \dots + \ell_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$

La fonction f est continue, dérivable, et sa dérivée est continue par hypothèse. Par conséquent la fonction f', puis aussi $(f')^2$ et $\sqrt{1 + (f')^2}$ est continue, donc intégrable. Ceci signifie que l'intégrale définie

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

existe et peut être calculée comme limite des sommes de Darboux supérieures ou limite des sommes de Darboux inférieures. Or,

$$s_\sigma\left(\sqrt{1 + f'(x)^2}\right) \leq L_n \leq S_\sigma\left(\sqrt{1 + f'(x)^2}\right)$$

car le minimum de $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ sur chaque intervalle $[x_{i-1}\,;\,x_i]$ est inférieur ou égal à $\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Idem pour le maximum.

$\Rightarrow$ comme s_σ et S_σ tendent vers la même limite, on peut utiliser le thm des deux gendarmes.

Théorème 1.1. *La longueur de l'arc de courbe défini par la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est égal à*

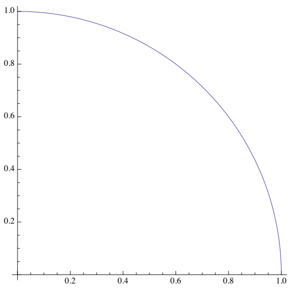
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Démonstration. Pour terminer le raisonnement commencé ci-dessus, remarquons que

$$\lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n}(\sqrt{1+(f')^2}) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \lim_{n\to\infty} s_{\sigma_n}(\sqrt{1+(f')^2}),$$

car la fonction est intégrable, ce qui signifie par définition que les sommes de Darboux supérieures et inférieures convergent vers la même limite (appelée intégrale définie). □

Exemple 1.2. Calculons le périmètre du cercle. Pour cela, nous décidons de calculer la longueur d'un quart de cercle, la partie comprise dans le premier quadrant.



$x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Nous considérons donc la fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Ainsi, $f'(x) = \left((1-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-1/2}\cdot(-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

On doit donc intégrer $\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$

Changement de variable : $x = \varphi(t) = \sin(t) \implies \varphi'(t) = \cos(t)$

Si $x \in [0;1]$, alors $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{dx}_{=\cos(t)dt} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\cos(t)}} \cos(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} 1\, dt$$

$$= t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Ecriture : si on pose

$\varphi(t) = x = \sin(t)$

$\varphi'(t) = dx = \cos(t)\,dt$

Le périmètre du cercle vaut donc $4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$

. L'aire du cercle vaut $4\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos(t)\,dt$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+3\cos(2t)\,dt = 2\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

2 Intégration de fonctions rationnelles "simples"

Rappelons qu'une primitive de la fonction $f(x) = x^n$ est $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ si $n \geq 0$. Par linéarité, nous savons donc intégrer toutes les fonctions polynomiales.

Proposition 2.1. *Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ une fonction polynômiale avec $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme*

$$\frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c\ ,\quad c \in \mathbb{R}$$

Nous savons aussi intégrer les fractions rationnelles de la forme $1/x^n = x^{-n}$ par le même procédé (avec le cas particulier $n = 1$ à tenir en compte) :

Proposition 2.2. *Les primitives de $\frac{1}{x}$ sont de la forme* $\ln|x| + c$

les primitives de $\frac{1}{x^n}$, pour $n \geq 2$, sont de la forme $\dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c\ ,\quad c \in \mathbb{R}.$

On vérifie : $\left(\dfrac{x^{1-n}}{1-n}\right)' = \cancel{(1-n)}x^{-n} \cdot \dfrac{1}{\cancel{1-n}}$ ✓

De fait, nous savons aussi dériver les fonctions puissances $f(x) = x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, mais nous ne nous intéresserons pas à ces fonctions dans toute leur généralité aujourd'hui.

Exemple 2.3. Calculons $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+1}{(x-2)^2}dx$.

Changement de variable : $t = x - 2 \iff x = t + 2 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 1$

Astuce d'écriture : $(x)' = (t+2)' \iff dx = 1 \cdot dt$

si $x \in [3;4]$ alors $t \in [1;2]$

$$\int_3^4 \frac{x+1}{(x-2)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{t+3}{t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}\,dt$$

$$= \left[\ln t - 3\frac{1}{t}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{3}{2} - \ln 1 + 3 = \ln 2 + \frac{3}{2}.$$

Pour découvrir les primitives des fonctions rationnelles, nous continuerons avec celles dont le dénominateur est de degré 2. Etudions un exemple.

Rappelons au préalable que $\arctan x$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$.

Exemple 2.4. Calculons les primitives de la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-6x+13}$. $\Delta = 6^2 - 4.13 < 0$

L'idée consiste à compléter le dénominateur de sorte à faire apparaître un carré parfait $(x-3)^2$, puis de poser $u = x - 3$. Ainsi, $x^2-6x+9-9+13 = (x-3)^2+4$

$$\frac{2x-1}{x^2-6x+13} = \frac{2x-1}{(x-3)^2+4} = \frac{2u+5}{u^2+4} = \frac{2u}{u^2+4} + \frac{5}{u^2+4}$$

Primitive de $\dfrac{2u}{u^2+4} = \ln|u^2+4| + c = \ln|x^2-6x+13| + c$

Primitive de $\dfrac{5}{u^2+4}$. On aimerait faire apparaître la dérivée de arctan...

$$\frac{5}{u^2+4} = \frac{5}{4\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2+1\right)} \Rightarrow \text{primitive } \frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + c$$

Ainsi, $F(x) = \ln|x^2-6x+13| + \dfrac{5}{2}\arctan\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

La généralisation de cette méthode donne la formule générale de l'intégration des "éléments simples du second degré".

Théorème 2.5. Eléments simples du second degré. *Soit r et s deux réels tels que $r^2 - s < 0$. Alors les primitives de la fonction $\dfrac{bx+c}{x^2+2rx+s}$ sont*

↳ le Δ du dénominateur est négatif $\Rightarrow$ pas factorisable.

$$\frac{b}{2}\ln(x^2+2rx+s) \;+\; \frac{c-rb}{\sqrt{s-r^2}}\arctan\left(\frac{x+r}{\sqrt{s-r^2}}\right) \;+\; k \quad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La dérivée de $\dfrac{b}{2}\ln(x^2+2rx+s)$ vaut $\dfrac{b}{\cancel{2}}\,\dfrac{\cancel{2}x+\cancel{2}r}{x^2+2rx+s} = \dfrac{bx+br}{x^2+2rx+s}$

Dérivons la deuxième partie et montrons qu'elle vaut $\dfrac{-br+c}{x^2+2rx+s}$:

$$\left(\frac{c-rb}{\sqrt{s-r^2}}\arctan\left(\frac{x+r}{\sqrt{s-r^2}}\right)\right)' = \frac{c-rb}{\sqrt{s-r^2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+r}{\sqrt{s-r^2}}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-r^2}}$$

dérivée interne

$$= \frac{c-rb}{\cancel{s-r^2}} \cdot \frac{\cancel{s-r^2}}{(x+r)^2+s-r^2}$$

$$= \frac{-br+c}{x^2+2rx+\cancel{r^2}+s-\cancel{r^2}}$$

□

Pour terminer cette section, voyons ce que nous pouvons faire lorsque le degré du numérateur est plus grand ou égal à celui du dénominateur. Dans ce cas nous effectuons d'abord la division euclidienne pour nous ramener à la situation précédente.

Exemple 2.6. On cherche à intégrer la fonction $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -1 & x^2+1 \\ \hline -x^2 & -1 & 1 \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$\Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$

$\Longrightarrow$ Primitive : $x - 2\arctan(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3 Décomposition en éléments simples

Pour intégrer des fonctions rationnelles dont le dénominateur est de degré supérieur à 2, nous utiliserons la méthode de *décomposition en éléments simples*. Le but est d'écrire une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions polynomiales réelles, comme somme de fonctions "simples"

$$\frac{a}{x+r}, \frac{bx+c}{x^2+2rx+s}, \dots, \frac{a_k}{(x+r)^k}, \frac{b_kx+c_k}{(x^2+2rx+s)^k}$$

que nous savons intégrer. Pour cela la méthode est de décomposer d'abord le dénominateur en un produit de polynômes irréductibles (de degré 1 ou 2), puis d'appliquer l'identité de Bézout pour factoriser le numérateur. Voyons un exemple.

Exemple 3.1. Nous cherchons les primitives de la fonction $\frac{12}{x^3-8}$.

Le degré du numérateur étant plus petit que celui du dénominateur, nous n'avons pas besoin d'effectuer de division euclidienne. Il faut donc décomposer $x^3 - 8$.

$(x^3-8) = (x-2)(x^2+2x+4)$ et x^2+2x+4 est indécomposable $(\Delta < 0)$

$$\frac{12}{x^3-8} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+4} = \frac{a(x^2+2x+4)+(bx+c)(x-2)}{x^3-8}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (2a-2b+c)x + 4a-2c}{x^3-8} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ 2a-2b+c = 0 \\ 4a-2c = 12 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{cases}$$

On écrit alors

$$f(x) = \frac{12}{x^3-8} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

Il suffit maintenant d'intégrer ces deux fractions rationnelles "simples" que nous venons d'étudier auparavant ! Ainsi les primitives de la fonction ci-dessus sont toutes de la forme :

Primitive de $\frac{1}{x-2}$: $\ln|x-2|$

$u = x+1$
$x = u-1$

Primitive de $\frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{x+4}{(x+1)^2+3} \overset{\downarrow}{=} \frac{u+3}{u^2+3} = \frac{u}{u^2+3} + \frac{3}{u^2+3}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{u^2+3} + \frac{3}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$\Longrightarrow F(x) = \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, \; C \in \mathbb{R}$$

En général, on peut toujours décomposer une fraction rationnelle en éléments simples. Nous ne verrons pas la théorie dans toute sa généralité (l'année prochaine en algèbre !), mais énonçons simplement le résultat que nous avons appliqué ci-dessus.

Proposition 3.2. *Soient $q(x)$ et $\bar{q}(x)$ deux polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ premiers entre eux et $Q(x) = q(x)\bar{q}(x)$. Alors la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$ se décompose comme*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)},$$

où $R(x)$ est un polynôme, $p(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à a, celui de $q(x)$, et $\bar{p}(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à b, celui de $\bar{q}(x)$.

Démonstration. L'identité de Bézout permet d'écrire $q(x)c(x) + \bar{q}(x)\bar{c}(x) = 1$. On remplace dans la fraction rationnelle et on simplifie

$$\frac{P(x)\cdot 1}{q(x)\cdot\bar{q}(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)c(x)}{\bar{q}(x)} + \frac{P(x)\bar{c}(x)}{q(x)}.$$

On effectue ensuite les divisions et on appelle $R(x)$ la somme des deux quotients. Il reste alors une expression de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}.$$

□

Exemple 3.3. Calcuons l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}dx$.

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Division euclidienne : $\frac{x^4}{x^3+1} = x - \frac{x}{x^3+1} = x - \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

Décomposition en éléments simple :

$$\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{x^3+1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=1 \\ a+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}, \; b=c=\frac{1}{3}$$

Ainsi, $\frac{x}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$

$u = x-\frac{1}{2}$

$x = u+\frac{1}{2}$

Complétion du carré : $\frac{x+1}{x^2-x+1} = \frac{x+1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}$

$$= \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{3}} \frac{1}{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$\int du$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}dx = \int_0^1 x - \frac{x}{x^3+1}dx = \int_0^1 x + \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{6}\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{\sqrt{3}}{3}\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{=\frac{\pi}{6}} - \left(0+\frac{1}{3}\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{6}\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{\sqrt{3}}{3}\underbrace{\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)}_{=-\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln(2) - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln(2) - \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$