Thm fondamental du calcul intégral :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f.$$

III. Techniques d'intégration

Nous avons fait le lien entre l'intégrale définie à la Riemann et l'intégrale indéfinie, c'est-à-dire le calcul de primitives. La plupart du temps, le calcul d'une intégrale définie se fera donc via la recherche d'une primitive, mais il ne faudra pas oublier pour autant les sommes de Darboux puisque nous reprendrons épisodiquement cette technique pour appliquer le calcul intégral à la recherche de longueurs de courbe, de volume de tonneaux, etc.
Aujourd'hui, nous allons reprendre les grands résultats de la dérivation et en tirer des théorèmes d'intégration : intégration par changement de variables, intégration par parties.

1 L'intégrale en fonction de ses bornes

Nous avons fait le lien entre les primitives d'une fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et l'intégrale définie en nous rendant compte que la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f. Une propriété importante de l'intégrale vient de la possibilité de définir d'autres fonctions en changeant les bornes d'intégration.

Proposition 1.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue. Soient encore I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g, h : I \to [a, b]$ des fonctions réelles dérivables sur I. Alors la fonction*

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

est dérivable et, pour tout $x \in I$, on a

$$K'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$$
$$= F(g(x)) - \cancel{F(a)} - \left(F(h(x)) - \cancel{F(a)}\right)$$

Par dérivabilité de K, F, g et h, on obtient

$$K'(x) \overset{(*)}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x) - F'(h(x)) \cdot h'(x)$$
$$\overset{(*)}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

(*) dérivée d'une fct composée

(*) TFCI (thm fond. du calcul intégral)

□

Exemple 1.2. Trouvons le minimum global de la fonction $f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin t} dt$.

On applique ce qui précède (pour la beauté du geste...)

$h(x) = 0 \Rightarrow h'(x) = 0$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

d'où $f'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot 2x - e^{\sin(0)} \cdot 0 = \underbrace{e^{\sin(x^2)}}_{u} \cdot \underbrace{2x}_{u}$

Ainsi, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

C'est un minimum car

1ère méthode :

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min en $x=0$	$\nearrow$

2e méthode : $f''(x) = \underbrace{e^{\sin(x^2)}}_{u} \cdot \underbrace{2}_{v'} + \underbrace{e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}_{u'} \cdot \underbrace{2x}_{v}$

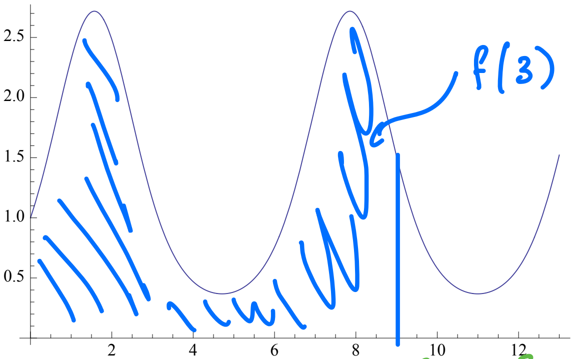
$$= 2 \cdot e^{\sin(x^2)} \left(1 + \cos(x^2) \cdot 2x^2\right)$$

> 0 dans un voisinage de $x = 0$

$\Rightarrow$ fonction est convexe en $x = 0$ qui est bien un minimum.

$g(x) = e^{\sin(x)}$

Voici le graphe de la fonction périodique $e^{\sin x}$ pour $0 \leq x \leq 13$:



car $x^2 = (-x)^2 \Rightarrow f(x) = f(-x)$

Remarquons que la fonction f est une fonction paire qui donne l'aire de la surface comprise entre les abscisses 0 et x^2. Elle est donc strictement croissante pour $x > 0$.

et la courbe $y = g(x)$ et l'axe Ox.

2 Le changement de variables

La formule que nous venons de voir est basée sur la règle de "dérivation en chaîne" (dérivation d'une composition de fonctions). Elle est à la base de l'une des méthodes d'intégration les plus importantes et des plus utilisées. La démonstration n'est pas très compliquée, mais dans la pratique le défi consiste à trouver le "bon" changement de variables qui rendra possible le calcul de l'intégrale...

Théorème 2.1. Intégration par changement de variables. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle ouvert contenant deux nombres $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction dérivable dont la dérivée φ' est continue. Alors*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

(finalement, on pose $x = \varphi(t)$

Démonstration. Posons $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, ce qui définit une fonction continue, donc intégrable et introduisons la fonction

$$G(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt.$$

Par la proposition 1.1, $G'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(a) \cdot 0 = g(x)$

Et par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_a^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

nom de variable muette

□

Lorsqu'on veut calculer l'intégrale d'une fonction de la forme $f(ax+b)$ il vaut parfois la peine d'effectuer le changement de variables $t = ax + b$, ou encore $x = \varphi(t) = \dfrac{t-b}{a}$.

Exemple 2.2. Calculons $\displaystyle\int_1^2 e^{5x-4}dx$.

$t = 5x-4 \iff x = \varphi(t) = \dfrac{t+4}{5} \Rightarrow \varphi'(t) = \dfrac{1}{5}$

si $x \in [1;2]$ alors $t \in [1;6]$

$$\Rightarrow \int_1^2 e^{5x-4}dx = \int_1^6 e^t \cdot \frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5} e^t \Big|_1^6 = \frac{1}{5}\left(e^6 - e^1\right)$$

$$\int_1^2 e^{5x-4}dx = \frac{1}{5} e^{5x-4}\Big|_1^2 = \frac{1}{5}\left(e^6 - e^1\right).$$

On aurait aussi pu deviner qu'une primitive de la fonction e^{5x-4} ressemble à e^{5x-4}, mais qu'il faut corriger par la dérivée interne si bien qu'une primitive est $\dfrac{e^{5x-4}}{5}$.

Un autre changement de variables courant consiste à poser $x = \varphi(t) = \tan(t)$, de sorte que $\varphi'(t) = 1 + \tan^2(t) = 1 + x^2$, ce qui permet de simplifier parfois des expressions difficilement intégrables directement.

Exemple 2.3. Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

On pose donc $\varphi(t) = \tan(t)$ si bien que $\varphi'(t) = 1 + \tan^2(t)$. Ainsi, lorsque $x \in [0,1]$, on a

$t \in [0; \frac{\pi}{4}]$

La formule du changement de variables permet donc d'écrire :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{1+\tan^2(t)}}{\cancel{(1+\tan^2(t))}\sqrt{1+\tan^2(t)}}\,dt$$

Calculons l'expression sous la racine :

$$1 + \tan^2(t) = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

Comme $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $\cos(t) > 0$ donc $\sqrt{\cos^2(t)} = +\cos(t)$

Ainsi, on doit calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)\,dt = \sin(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 Intégration par parties

La méthode de l'intégration par changement de variables a été déduite de la formule de dérivation d'une composition de fonctions. La méthode que nous allons voir maintenant vient de la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions : $(f(x) \cdot g(x))' =$ $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Théorème 3.1. Intégration par parties. *Soit I un intervalle ouvert contenant a et b. On considère deux fonctions dérivables $f, g : I \to \mathbb{R}$ dont les dérivées sont continues. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration.
La formule de la dérivation du produit fg que nous venons de rappeler permet d'écrire

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité de } \int \dots dx}}{=} f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

~~Il s'agit bien de~~

□

Les cas typiques où la méthode d'intégration par parties s'impose est celle où l'on voit un produit de deux fonctions dont l'une admet une primitive simple et l'autre une dérivée plus simple encore. C'est le cas par exemple d'un produit de fonctions trigonométriques ou exponentielles avec des fonctions polynômiales.

Exemple 3.2. On veut calculer $\int_0^1 x^2\cos(x)\,dx$.

- x^2 se dérive facilement et sa dérivée $2x$ est "plus simple" que x^2
- $\cos(x)$ s'intègre facilement et sa primitive $\sin(x)$ n'est pas plus compliquée" que $\cos(x)$.

On pose $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$
$g'(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$

Ainsi, $\int_0^1 x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \underline{2x\cdot\sin(x)}\,dx$

$= \sin(1) + 2x\cos(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \cos(x)\,dx$

$= \sin(1) + 2\cos(1) - 2\sin(x)\Big|_0^1$

$= \sin(1) + 2\cos(1) - 2\sin(1)$

$= 2\cos(1) - \sin(1)$

On pose
$f(x) = x$
$f'(x) = 1$
$g'(x) = \sin(x)$
$g(x) = -\cos(x)$
$-$ dans la formule

Voici maintenant un exemple où nous utiliserons successsivement les deux méthodes que nous avons apprises aujourd'hui.

Exemple 3.3. On veut calculer $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx$.
Pour faire disparaître la racine, nous posons $t = \sqrt{x+1}$, c'est-à-dire $x = \varphi(t) =$ $t^2 - 1$ et $\varphi'(t) = 2t$

si $x \in [0;3]$, $t \in [1;2]$

$\Rightarrow \int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^2 e^t \cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 \underbrace{t}_{f}\cdot\underbrace{e^t}_{g'}\,dt$

$f' = 1$
$g = e^t$

$= 2\,t\cdot e^t\Big|_1^2 - 2\int_1^2 1\cdot e^t\,dt$

$= 2\left(t\cdot e^t - e^t\right)\Big|_1^2$

$= 2\cdot e^t(t-1)\Big|_1^2$

$= 2\cdot e^2\cdot 1 - 0 = 2e^2$

Pour une primitive de $e^{\sqrt{x+1}}$, on remplace $t = \sqrt{x+1}$ dans (*)
d'où $2e^{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$

Exemple 3.4. On veut calculer $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$.

Lorsque $n = 1$, nous connaissons une primitive de la fonction $\frac{1}{t^2+1}$, il s'agit de $\arctan t$, si bien que $I_1(x) = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$. Nous effectuons maintenant un raisonnement par induction et supposons que les fonctions $I_m(x)$ sont connues pour $m \leq n$.

Posons $f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n}$ et $g'(t) = 1$.

Alors $f'(t) = \left((t^2+1)^{-n}\right)' = -n\,(t^2+1)^{-n-1} \cdot 2t = \dfrac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}$ et $g(t) = t$

$$I_n(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^n}}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\, dt = \frac{t}{(t^2+1)^n}\Bigg|_0^x + 2n \int_0^x \frac{(t \cdot t + 1) - 1}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} - 0 + 2n \int_0^x \frac{\cancel{(t^2+1)}\cdot 1}{(t^2+1)^{n+\cancel{1}}}\, dt - 2n \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\, I_n(x) - 2n\, I_{n+1}(x)$$

d'où $$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)\, I_n(x)\right)$$

Cette formule de récurrence permet de calculer $I_n(x)$ pour tout $n \geq 1$. Par exemple

$$I_2(x) = \frac{x}{2\,(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

4 Intégration d'expressions trigonométriques

Pour terminer ce cours consacré aux techniques d'intégration, nous parlerons des intégrales de fonctions trigonométriques. Lorsque les primitives ne sont pas immédiatement reconnaissables, il est souvent judicieux d'effectuer une transformation basée sur une formule trigonométrique.

Exemple 4.1. Calculons les primitives de la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.
En se souvenant que $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$, les primitives de $\cos^2(x)$ sont celles de $\dfrac{\cos(2x)+1}{2}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

On peut également procéder par parties :

$f' = -\sin(x)$
$g = \sin(x)$

$$\begin{aligned} I = \int \underbrace{\cos(x)}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx &= \cos(x)\sin(x) + \int +\sin^2(x)\,dx \\ &= \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,dx \\ &= \cos(x)\sin(x) + \int 1\,dx - \int \cos^2(x)\,dx \\ &= \cos(x)\sin(x) + x - I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2I = \cos(x)\sin(x) + x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x + \cos(x)\cdot\sin(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemple 4.2. Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)\,dx. = I$

On a $\sin^4(x) = (1-\cos^2(x))^2$ donc

on pose $t = \cos(x) = \varphi(x)$
d'où $\varphi'(x) = -\sin(x)$
Si $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $t \in [1; 0]$

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{\pi/2} \underbrace{(1-\cos^2(x))^2}_{f(\varphi(x))}\underbrace{(-\sin(x))}_{\varphi'(x)}\,dx \\ &= -\int_1^0 (1-t^2)^2\,dt \\ &= +\int_0^1 1 - 2t^2 + t^4\,dt = \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$