Notes de cours
Semaine 22

Cours Turing

Table des matières

1 Coloration de graphe

La coloration de graphe est un problème classique en théorie des graphes. Il s'agit de colorer les sommets d'un graphe de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Une **coloration valide** d'un graphe est une coloration de ses sommets telle que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

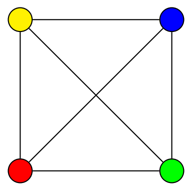


Figure 1: Exemple de graphe 4-coloriable

Si un graphe peut être coloré avec k couleurs, on dit que c'est un graphe **k-coloriable**.

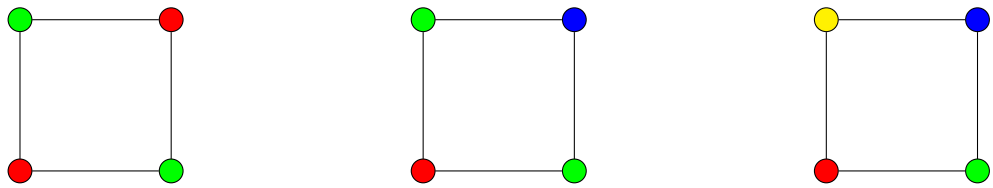


Figure 2: Ce graphe est 2-coloriable, 3-coloriable et 4-coloriable

Le **nombre chromatique**, d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer ses sommets, le nombre chromatique est noté $\chi(G)$.

Le nombre chromatique du graphe de la figure 1 est 4, le nombre chromatique du graphe de la figure 2 est 2.

! Déterminer le nombre chromatique d'un graphe est un problème NP-complet. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme efficace pour le résoudre.

Pour certains types de graphes, il est possible de déterminer le nombre chromatique de manière efficace, par exemple :

- Le nombre chromatique d'un graphe complet K_S est égal à son nombre de sommets.
- Le nombre chromatique d'un graphe biparti complet $K_{m,n}$ est égal à 2.

Dans la figure 3, nous pouvons voir un graphe biparti complet $K_{2,3}$ et un graphe complet K_6.

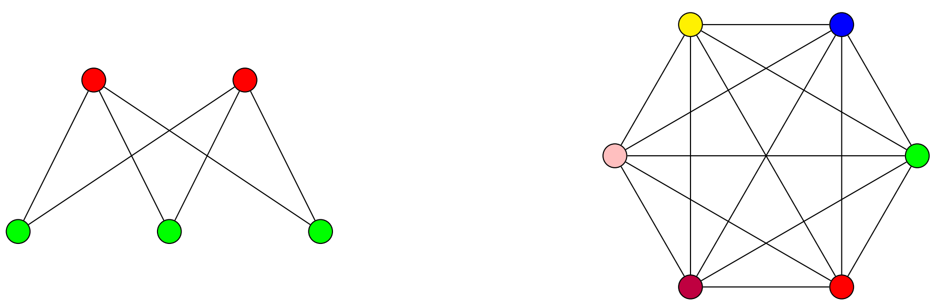


Figure 3: $K_{2,3}$ à gauche et K_6 à droite

2 Graphe biparti

Un graphe est dit biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles U et V tels que chaque arête relie un sommet de U à un sommet de V.

Un graphe biparti est noté $G(U, V, E)$ où U et V sont les ensembles de sommets et E est l'ensemble des arêtes.

Un graphe biparti est un graphe 2-coloriable.

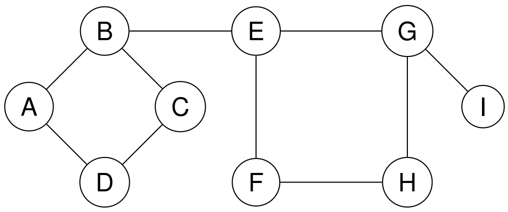


Figure 4: Exemple de graphe biparti

Ci dessous, un exemple de code Python qui vérifie si un graphe est biparti ou non.

```
def is_bipartite(graph):
    color = {}
    for vertex in graph.vertices:
        color[vertex] = None
    color[graph.vertices[0]] = 0
    queue = [graph.vertices[0]]
    while queue:
        current = queue.pop(0)
        for neighbor in graph.neighbors(current):
            if color[neighbor] is None:
                color[neighbor] = 1 - color[current]
                queue.append(neighbor)
            elif color[neighbor] == color[current]:
                return False
    return True
```

En appliquant le code ci-dessus, nous obtenons le résultat de la figure 5.

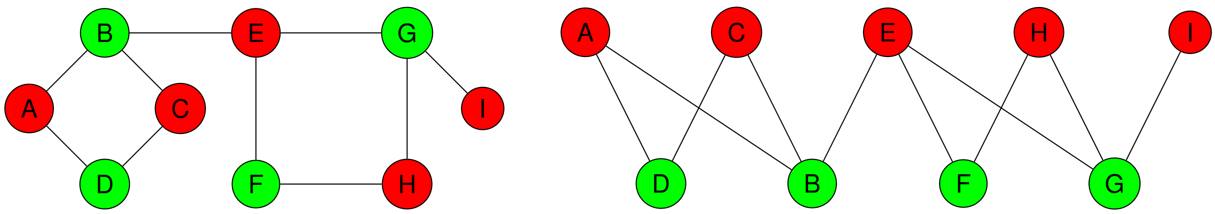


Figure 5: Il suffit de sélectionner les sommets en rouge les assigner à U et les sommets en vert à V

A noter que :

- Un arbre est un graphe biparti.
- Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire.

3 Algorithme de Welsh-Powell

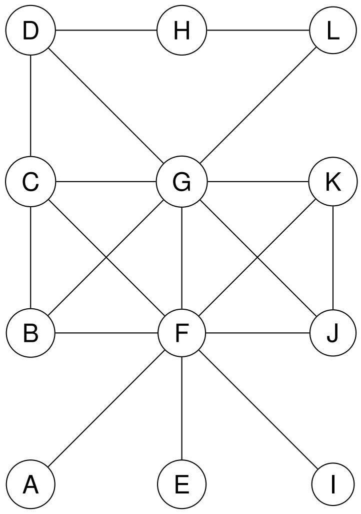
L'algorithme de Welsh-Powell est un algorithme glouton pour la coloration de graphe. Il consiste à colorer les sommets du graphe dans un ordre décroissant de degré.

L'algorithme de Welsh-Powell est décrit dans le pseudo-code suivant:

1. Calculer le degré de chaque sommet du graphe.
2. Trier les sommets du graphe dans un ordre décroissant de degré.
3. Colorer le premier sommet avec la couleur actuelle (initialement 0).
4. Colorer les sommets suivants, en respectant l'ordre décroissant, avec la couleur actuelle s'ils ne sont pas adjacents à un sommet de la même couleur.
5. Supprimer les sommets déjà coloriés de la liste des sommets à colorier ainsi que les arêtes qui y sont reliées. S'il reste des sommets à colorier, incrémenter la couleur actuelle et reprendre à l'étape 3.

Exemple

Considérons le graphe suivant:



Dans ce graphe, le sommet:

- F a un degré de 8
- G a un degré de 7
- C a un degré de 4
- K a un degré de 3
- J a un degré de 3
- B a un degré de 3
- D a un degré de 3
- L a un degré de 2
- H a un degré de 2
- I a un degré de 1
- E a un degré de 1
- A a un degré de 1

4 Enigme des trois maisons

Un lotissement de trois maisons doit être raccordé à l'eau, à l'électricité et au gaz. Chaque maison doit être raccordée à chaque service. Comment peut-on raccorder les maisons aux services sans que les tuyaux ne se croisent?

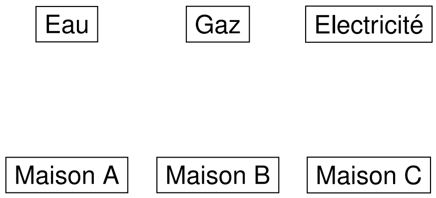


Figure 6: Enigme des 3 maisons

C'est impossible, c'est un problème de graphe planaire. En effet, si on représente les maisons et les services par des sommets et les raccordements par des arêtes, on obtient le graphe de la figure 7.

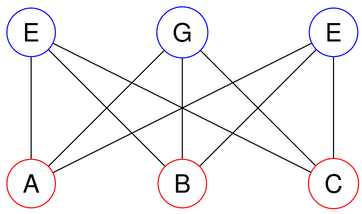


Figure 7: Graphe de l'enigme des 3 maisons

Le graphe de la figure 7 est un graphe biparti, plus précisément $K_{3,3}$. Il est impossible de le dessiner sur une surface plane sans que ses arêtes ne se croisent.

5 Graphe planaire

Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sur une surface plane sans que ses arêtes ne se croisent. Dans la figure 8, le graphe de gauche est planaire, tandis que celui de droite ne l'est pas.

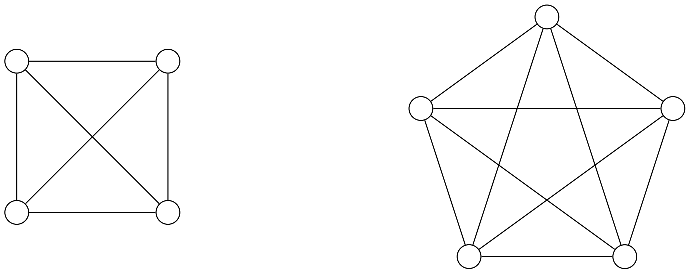


Figure 8: Exemple de graphe planaire à gauche et non planaire à droite

En effet il est possible de dessiner le graphe de gauche sur une surface plane sans que ses arêtes ne se croisent comme le montre la figure 9.

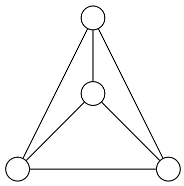


Figure 9: Le graphe est planaire s'il existe une représentation où les arêtes ne se croisent pas.

5.1 Théorème de Kuratowski

Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5.

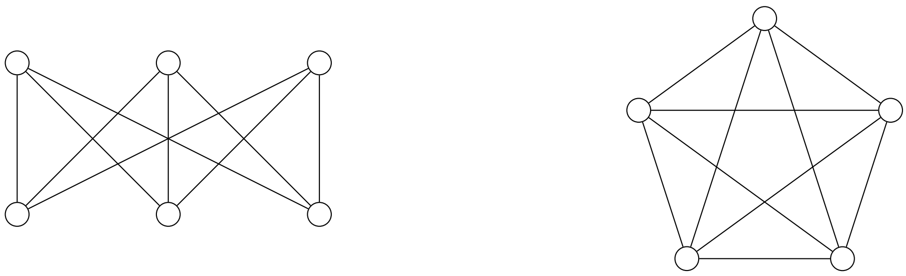


Figure 10: $K_{3,3}$ à gauche et K_5 à droite

5.2 Homéomorphisme

Deux graphes sont homéomorphes s'ils peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre par des opérations de contraction ou expansion d'arêtes.

5.3 Contractions d'arêtes

La contraction d'une arête consiste à la supprimer et à fusionner les deux sommets qu'elle reliait en un seul sommet.

5.4 Graphe de Petersen

Le graphe de Petersen est un graphe qui contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ mais également un sous-graphe homéomorphe à K_5. Il est donc non planaire.
Ce graphe est souvent utilisé dans la théorie des graphes comme contre-exemple.
Dans la figure 11 nous pouvons voir le graphe de Petersen qui a un nombre chromatique χ de 3.

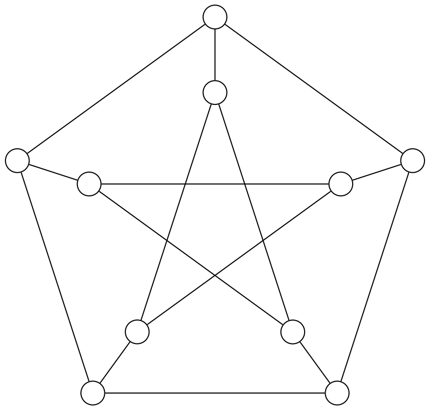


Figure 11: Graphe de Petersen

Dans la figure 12 nous pouvons voir les compressions d'arêtes pour obtenir un sous-graphe homéomorphe à K_5.

Figure 12: Le graphe de Petersen contient un sous-graphe homéomorphe à K_5

Dans la figure 13 nous pouvons voir les compressions d'arêtes pour obtenir un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$.

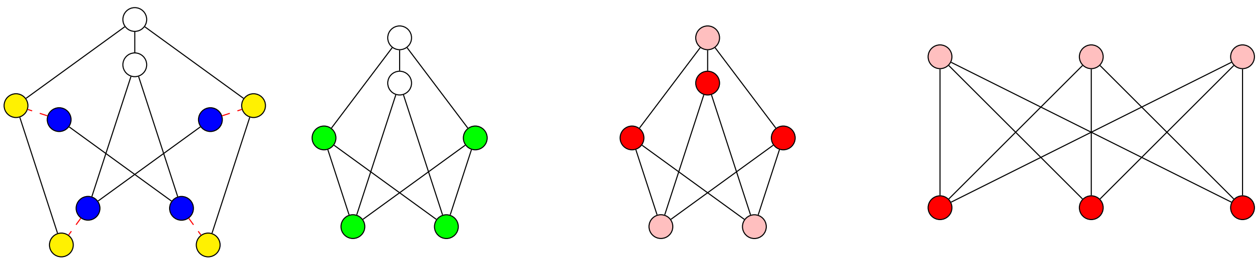


Figure 13: Le graphe de Petersen contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$

6 Théorème des quatre couleurs

Tout graphe planaire peut être coloré avec au plus quatre couleurs.

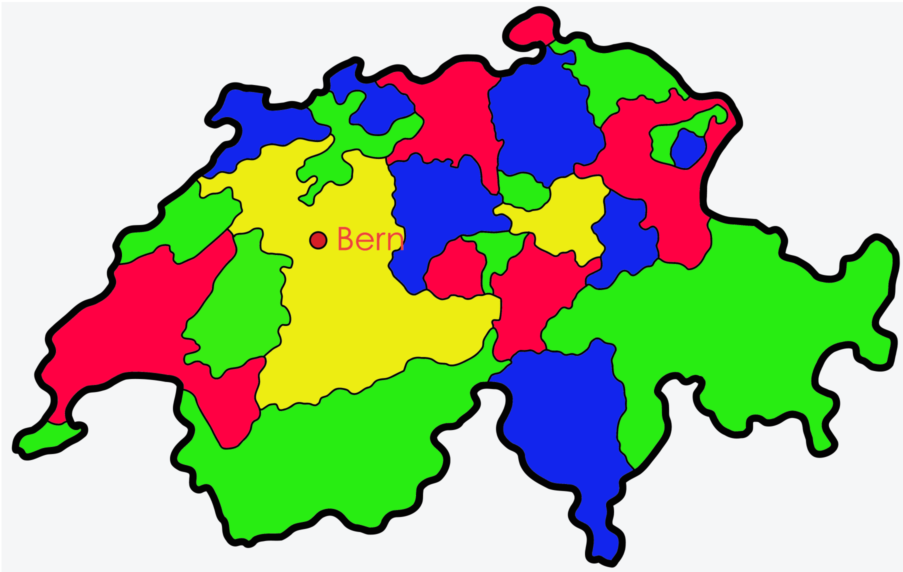


Figure 14: Les cantons de la Suisse peuvent être coloriés avec 4 couleurs

Dans la figure 14 nous pouvons voir que les cantons de la Suisse peuvent être coloriés avec 4 couleurs. Pouvons-nous colorier les cantons de la Suisse avec moins de 4 couleurs?

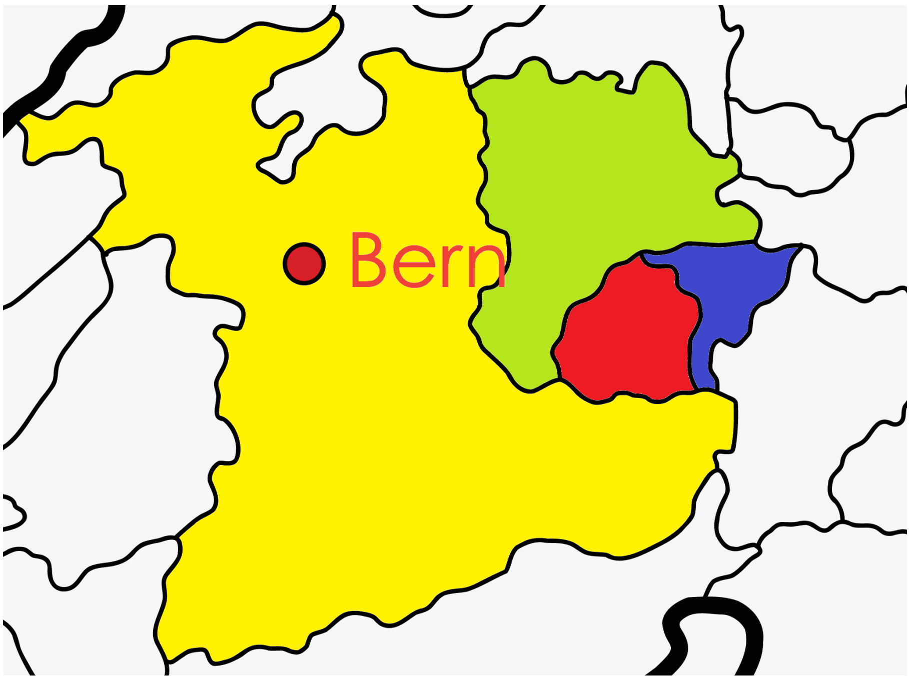


Figure 15: Zone très connectée de la Suisse

Dans la figure 16 nous représentons la situation de la figure 15 par un graphe.

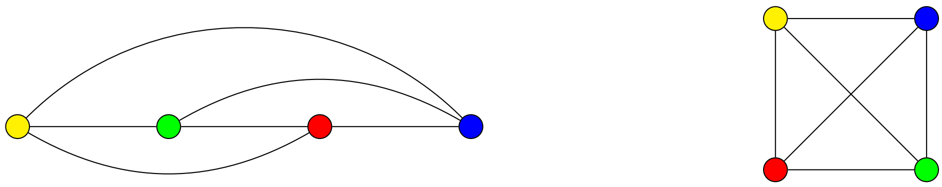


Figure 16: Le graphe contient un sous-graphe homéomorphe à K_4

Dans la figure 16 nous pouvons voir que le graphe des cantons de la Suisse contient un sous-graphe homéomorphe à K_4.
Grâce au théorème des quatre couleurs, nous savons que tout graphe planaire peut être colorié avec au plus quatre couleurs.
Nous pouvons donc colorier les cantons de la Suisse avec 4 couleurs.

7 Applications pratiques

La coloration de graphes est utilisée dans de nombreux domaines. Par exemple:

- Dans le domaine de la planification pour éviter les conflits
- Dans le domaine de la radio et des télécommunications pour éviter les interférences
- Pour modéliser et résoudre certains jeux comme le sudoku

8 Exercice

Appliquer l'algorithme de Welsh et Powell pour colorier le graphe de la figure 17.

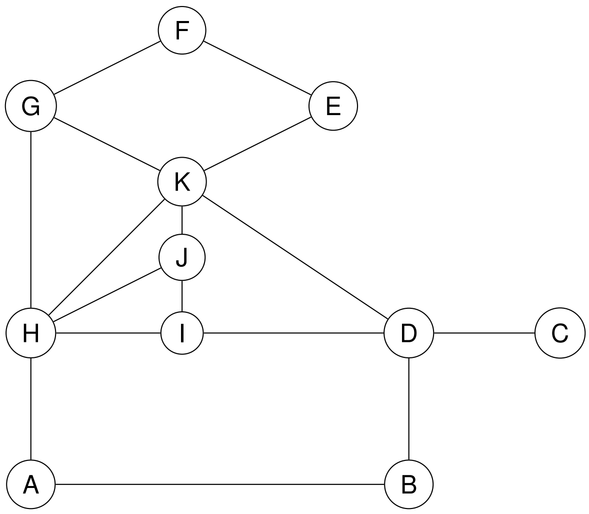


Figure 17: Graphe à colorier