Exercice 1.

a) On considère d'abord le cas $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta = \varepsilon \cdot 2\sqrt{a}$. Alors, si $x \in \mathbb{R}_+$ est tel que $0 < x - a < \delta$ (et en particulier $a < x$, donc $\sqrt{a} < \sqrt{x}$), on a

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{x - a}{2\sqrt{a}} < \frac{\delta}{2\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon \cdot 2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

qui est bien l'inégalité voulue pour démontrer $\lim_{x \to a^+} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Pour le cas $a = 0$, on considère bien sûr $\varepsilon > 0$; mais δ choisi ci-dessus ne serait pas défini (on aurait $\delta = 0$). Dans ce cas, on peut choisir directement $\delta = \varepsilon^2$. En effet, si $x \in \mathbb{R}_+$ est tel que $0 < x - a < \delta$, on a $0 < x < \varepsilon^2$, et donc $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} < \varepsilon$, comme voulu.

b) La démonstration est similaire au cas $a > 0$ ci-dessus (il faut remplacer $x - a$ par $a - x$, et on a $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{a} - \sqrt{x}$).

c) Par **a)** et **b)**, et le fait que

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} g(x) = b \text{ et } \lim_{x \to a^+} g(x) = b$$

on a pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ que $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. La proposition du cours sur la limite d'une composition de fonctions donne alors le résultat énoncé (avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{a}$).

d) Un des premiers exercices sur les suites demande de démontrer que si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ (si toutes les racines sont définies). Par la proposition sur l'équivalence de la définition d'une limite de fonction et la convergence de suites, les résultats demandés sont redémontrés.

Exercice 2. Comme $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, on a $-x \leq x \sin(1/x) \leq x$ si $x > 0$, et $x \leq x \sin(1/x) \leq -x$ si $x < 0$. Comme les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 (par la droite ou la gauche), on conclut par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{x \to 0^+} x \sin(1/x) = 0$, et $\lim_{x \to 0^-} x \sin(1/x) = 0$. Donc $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

Exercice 3.

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{x^2 + x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} 2\cos(x) = 2.$

Exercice 4.

a) Le polygone peut se partager en n triangles isocèles dont les deux côté égaux mesurent 1 et l'angle au centre vaut $\frac{2\pi}{n}$. Par le théorème de l'aire, un de ces triangle a pour aire $\frac{1}{2}\sin(2\pi/n)$ et donc l'aire du polygône vaut $\frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

b) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi \cdot 1 = \pi$, qui est bien l'aire d'un disque de rayon 1.

Exercice 5.

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1 - \sin(x)/x}{1 + \sin(x)/x} = 1,$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sin^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} -\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = -1.$

Exercice 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{1-\cos(x)}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{|\sin(x)|} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(x)}}{\frac{|\sin(x)|}{|x|}} = \sqrt{2}.$$

Exercice 7.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}{1+1/x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}{1+1/x}} = \sqrt{1}\cdot\sqrt{1} = 1.$$

Exercice 8. Pour que f admette une asymptote verticale $x=-3$, il faut que $d=3$. Pour que f admette une asymptote oblique d'équation $y=-2x+1$, nous pouvons procéder par division euclidienne *ou* avec le calcul de limites :

- Par division euclidienne : il faut que la division de ax^2+bx+c par $x+3$ ait un quotient de $q(x)=-2x+1$. On calcule (par Horner ?) $q(x)=ax+(b-3a)$ et le reste est $r(x)=c-3b+9a$. On veut $-2x+1=ax+(b-3a)$, dont on déduit $a=-2$ et $b+6=1$, soit $b=-5$.
- Par les limites : la pente de -2 de l'asymptote oblique sa calcule avec $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, donc $a=-2$. De même, l'ordonnée à l'origine de 1 se calcule avec $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(b+6)x+c}{x+3}=b+6$, donc $b=-5$.

Finalement, il reste à trouver c que l'on déduit du fait que le graphe de f passe par le point $(2;-2)$ et donc que $f(2)=-2$; autrement dit $\frac{4(-2)+2(-5)+c}{2+3}=-2$, ainsi $c=8$.

Exercice 9. Pour les asymptotes verticales il faut que $d=2$ et $e=-1$, ainsi on récrit $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+2)(x-1)}$. De la forme de $f(x)$ et du fait qu'elle admet une asymptote oblique d'équation $3x-7$, on en déduit immédiatement $a=3$ et $b=-7$ (en effet, lorsque $x\to\pm\infty$, la partie rationnelle $\frac{c}{(x+d)(x+d)}$ de $f(x)$ tendra vers 0). Finalement, on utilise le fait que le graphe de f passe par le point $(-5;20)$, autrement dit que $f(-5)=20$, pour obtenir la valeur de $c=756$.

Exercice 10. Dans les calculs qui suivent, les expression indéterminées du type "$\frac{\infty}{\infty}$" ou "$+\infty-\infty$" qui nécessitent un approfondissement (une amplification ou une simplification particulière) sont explicitées dans le premier item seulement. Ces évaluations sont effectuées implicitement dans le reste de l'exercice.

a)
- **Domaine.** Pour que la fonction soit définie, il faut s'assurer que $x^2+1\geq 0$, ce qui est toujours le cas. Donc $D(f)=\mathbb{R}$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \text{“}\frac{-\infty}{-\infty}\text{”} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 3 \qquad (\text{car } \sqrt{x^2}=|x|=-x \text{ si } x<0)$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3x) = \lim_{x\to-\infty} -x+1-\sqrt{x^2+1} = \text{“}+\infty-\infty\text{”} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1-(x^2+1)}{-x+1+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

Donc $y=3x+1$ est asymptote oblique à gauche. De même,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \text{“}\frac{+\infty-\infty}{+\infty}\text{”} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} x+1-\sqrt{x^2+1} = \text{“}+\infty-\infty\text{”}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

Donc $y = x+1$ est asymptote oblique à droite.

- **Parité.** La fonction n'est ni paire, ni impaire. Par exemple, $f(-1) = -1-\sqrt{2}$ n'est ni égal à $f(1) = 3-\sqrt{2}$ (la fonction n'est donc pas paire), ni à $-f(1) = -3+\sqrt{2}$ (la fonction n'est pas impaire).

b)
- **Domaine.** Comme $4x^2+3 > 0$, il suffit pour que la fonction soit définie que $(4x+1)(x+4) \geq 0$; ce dernier produit décrit une parabole en "$\cup$" dont les zéros sont -4 et $-\frac{1}{4}$. Donc $D(g) =]-\infty;-4] \cup [-\frac{1}{4};+\infty[$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{(4x+1)(x+4)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3-(4x+1)(x+4)}{x\left(\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{(4x+1)(x+4)}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(17+\frac{1}{x}\right)}{-x^2\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{17}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{17}{4x} = 0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{(4x+1)(x+4)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(17+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{17}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)} = \frac{17}{4}$$

Donc $y = \frac{17}{4}$ est asymptote horizontale à gauche. Les limite pour $x \to +\infty$ de $\frac{g(x)}{x}$, puis de $g(x)$, s'obtiennent, au signe près, comme dans les calculs pour $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-17}{4x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \frac{-17}{4}$$

On obtient que $y = -\frac{17}{4}$ est asymptote horizontale à droite.

- **Parité.** Le domaine de définition de la fonction n'est pas symétrique par rapport à l'origine : g ne peut donc ni être paire, ni être impaire.

c)
- **Domaine.** Les racines impaires (ainsi que les polynômes) sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $D(h) = \mathbb{R}$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{x} = 1$$

puis on exploite l'identité $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(h(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2+2x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}}^2+2\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{4x} = 0$$

Donc $y = x$ est asymptote oblique à gauche et à droite.

- **Parité.** On a $h(-1) = \sqrt[3]{4}$ qui n'est ni égal à $h(1) = 0$, ni à $-h(1) = 0$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

d)
- **Domaine.** On a $D(f) = \mathbb{R}$.
- **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} i(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Donc $y=-\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à gauche. Par contre,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

et il n'y a pas d'asymptote oblique à droite.

- **Parité.** La fonction ne peut ni être paire, ni impaire parce que l'asymptote oblique à gauche ne possède pas de symétrique à droite.

Exercice 11.

a) La parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ est en "$\cup$" car $a>0$.

- Si $\Delta \leq 0$, la parabole est au-dessus ou tangente à Ox, et donc $ax^2+bx+c\geq 0$. On a alors $D(f)=\mathbb{R}$.
- Si $\Delta>0$, le polynôme ax^2+bx+c possède deux zéros distincts $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Comme la parabole est en "$\cup$", on a $D(f)=]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$.

b) On calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = -\sqrt{a}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+\sqrt{a}x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a}\right)} = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Donc $y=-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}$ est asymptote horizontale à gauche. Les limite pour $x\to+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ et de $f(x)$ se calculent de même, à signe près ; on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{a}x)=\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Donc $y=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ est asymptote horizontale à droite. Comme

$$\left|\sqrt{a}x+\tfrac{b}{2\sqrt{a}}\right| = \begin{cases} -\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{si } x<\frac{-b}{2a}, \text{ et} \\ \sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{si } x\geq\frac{-b}{2a} \end{cases}$$

les asymptotes de f sont bien confondues à gauche et à droite avec la courbe $y=\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$.

c) Commençons par trouver les éventuels points d'intersections du graphe de g avec le graphe de f : l'équation $g(x)=f(x)$ s'écrit $\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right|=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Au risque de rajouter des solutions, élevons chaque côté de l'égalité au carré : on obtient

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=ax^2+bx+c \qquad \text{qui est équivalent à} \qquad b^2-4ac=0$$

En d'autres termes, les deux courbes ne s'intersectent que lorsque $\Delta=0$ (et on se convainc qu'il n'y a pas de "solution rajoutée"). Traitons les différents cas, en exploitant que le seul zéro de g est $x=\frac{-b}{2a}$.

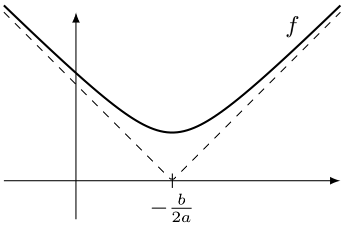
- Si $\Delta<0$, le sommet de la parabole $y=ax^2+bx+c$ est en $S=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ est au-dessus du zéro de g. En prenant la racine de ax^2+bx+c, on ne change pas la décroissance ou la croissance de la parabole. On obtient une branche d'hyperbole (voir le cours de 3e année sur les coniques).
- Si $\Delta=0$, on a

$$f(x)=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\left|\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right|=\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right|,$$

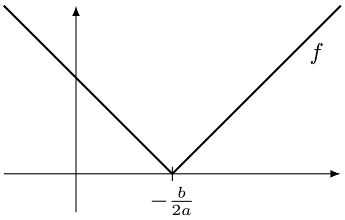
le graphe de f est confondu avec celui de g.

- Si $\Delta > 0$, le zéro de g est au milieu de "l'intervalle manquant" $]x_1; x_2[$ à $D(f)$. En x_1 et x_2, les zéros de f, le graphe de f sera donc en-dessous du graphe de g. On obtient dans ce cas deux demi-branches d'hyperbole (voir encore une fois le cours de 3e année sur les coniques).

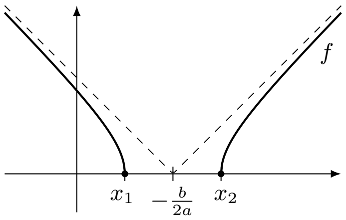
Voici des esquisses du graphe de f (avec $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$) dans les 3 cas traités ci-dessus.



Cas $\Delta < 0$



Cas $\Delta = 0$



Cas $\Delta > 0$