Corrigé série 21

Exercice 1 (10 points)

a) Les inéquations, pour $n = 1$, deviennent

$$\frac{1}{3} \leq 1 \leq \frac{8}{3},$$

et, pour $n = 2$,

$$\frac{8}{3} \leq 5 \leq 9.$$

b) On commence par montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n^3}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

On sait déjà, par le premier point, que c'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. On suppose donc, pour construire une induction, que l'inégalité est vraie pour un certain $n \geq 2$, et on essaye de voir qu'elle est alors aussi vrai pour $n + 1$.

On calcule

$$\frac{(n+1)^3}{3} = \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 + n^2 + n + \frac{1}{3},$$

où on a utilisé l'hypothèse d'induction pour écrire l'inégalité. On remarque que

$$n^2 + n + \frac{1}{3} \leq (n+1)^2.$$

En effet, cette inégalité est équivalente à $-\frac{2}{3} \leq n$. Ainsi, on a

$$\frac{(n+1)^3}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2,$$

comme voulu.

Il nous reste encore à voir que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3},$$

pour tout $n \geq 1$. À nouveau, on construit une induction. On sait déjà que l'assertion est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. On suppose donc qu'elle est vraie pour un certain $n \geq 2$ et on essaye de voir qu'elle est alors aussi vraie pour $n + 1$.

On calcule

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3} + (n+1)^2,$$

où on a utilisé l'hypothèse d'induction pour écrire l'inégalité. On remarque que

$$\frac{(n+1)^3}{3} + (n+1)^2 \leq \frac{(n+2)^3}{3}.$$

En effet, cette inégalité est équivalente à (après un peu de calcul) $-4 \leq 3n$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \leq \frac{(n+2)^3}{3},$$

comme voulu.

Exercice 2 (10 points)

Tous les points de la spirale sont de la forme

$$X(\phi) = (\phi \cos(\phi), \phi \sin(\phi)),$$

pour $\phi \in [0, 2\pi]$.

En particulier, ϕ est égale à la norme du vecteur $X(\phi)$, c'est-à-dire à la distance entre l'origine O et $X(\phi)$ (vu alors comme un point du plan). En formules, cela devient

$$\phi = ||X(\phi)|| = \delta(O, X(\phi)). \tag{1}$$

Le point P, étant sur la spirale, est aussi de la forme $X(\phi)$ pour un certain ϕ. Or, par construction, on sait que pour P

$$\phi = \theta,$$

c'est-à-dire que ϕ est égal à l'angle de la droite (OP) avec l'axe Ox.

Ainsi, on a

$$P = X(\theta) = (\theta \cos(\theta), \theta \sin(\theta)),$$

et on obtient directement que

$$\delta(O, P) = \theta.$$

Le point Q est aussi sur la spirale, et donc est aussi de la forme $X(\phi)$ pour un certain ϕ. En utilisant (1), on peut calculer le ϕ correspondant à Q :

$$\phi = ||Q|| = \delta(O,Q) = \frac{\delta(O,P)}{3} = \frac{\theta}{3}.$$

Ainsi, Q est le point

$$\left(\frac{\theta}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \frac{\theta}{3}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right).$$

Ce qui montre que l'angle de (OQ) avec l'axe Ox est bien $\frac{\theta}{3}$, comme voulu.

Exercice 3 (5 points)

a) Comme tout intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ contient un rationnel[1], le minimum de f sur $[a,b]$ sera toujours 0 pour tout intervalle $[a,b]$ avec $a<b$. Ainsi, comme une somme de zéro vaut toujours zéro, on a

$$s_\sigma(f) = 0.$$

Similairement, tout intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ contient un irrationnel[2].

Pour la même raison que tout à l'heure, on a donc

$$S_\sigma(f) = 1.$$

b) Il suit directement du point précédent que

$$s(f) = 0 \quad \text{et} \quad S(f) = 1.$$

c) On utilise le point précédent et la définition d'une fonction intégrable.

1. Cette propriété s'appelle la *densité* des rationnels dans les réels. Il est assez aisé de se convaincre qu'entre tous nombres réels a et b (avec $a<b$) on arrive à trouver un rationnel. Par exemple, on considérant l'écriture décimale de a et de b.

2. Il existe beaucoup de manières de le voir. On pourrait par exemple arguer que $[a,b]$ est un ensemble indénombrable et utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Une manière plus directe de construire une preuve est de choisir $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que

$$x := a + \frac{\pi}{2^n} < b, \qquad (\text{où } \pi = 3.1415\ldots).$$

Ainsi, $x \in [a,b]$ et on peut vérifier facilement (par exemple, par l'absurde) que x est irrationnel.

Exercice 4 (10 points)

a) La subdivision régulière d'ordre n est donnée par

$$0,\ \frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \frac{3a}{n},\ \ldots,\ \frac{na}{n} = a.$$

Ainsi, x_i est donné par

$$x_i = \frac{ia}{n}.$$

b) La fonction f est strictement croissante sur tout $[0, a]$. Ainsi, pour calculer son minimum m_i sur $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [0, a]$, il suffit de calculer $f(x_{i-1})$, donc

$$m_i = f(x_{i-1}).$$

De même, on trouve

$$M_i = f(x_i).$$

c) Pour m_i, l'aire du rectangle est

$$\frac{a}{n} \cdot m_i = \frac{a}{n} \cdot f\left(\frac{(i-1)a}{n}\right) = \frac{a}{n}\left(\frac{(i-1)a}{2n} + 1\right).$$

Pour M_i, l'aire du rectangle est

$$\frac{a}{n} \cdot M_i = \frac{a}{n} \cdot f\left(\frac{ia}{n}\right) = \frac{a}{n}\left(\frac{ia}{2n} + 1\right).$$

d) Les sommes de Darboux supérieures sont données par

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ia}{2n} + 1\right) &= \frac{a^2}{2n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \frac{a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{a^2}{2n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{a}{n} \cdot n \\
&= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{n+1}{n} + a
\end{aligned}$$

Pour les sommes de Darboux inférieures, on a, en utilisant le calcul des sommes de Darboux supérieures,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{(i-1)a}{2n} + 1\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ia}{2n} + 1\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{2n} \\
&= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{n+1}{n} + a - \frac{a^2}{2n} \\
&= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{n-1}{n} + a.
\end{aligned}$$

e) Les sommes tendent vers
$$\frac{a^2}{4} + a.$$

f) Cela découle du point précédent.

g) On peut découper la figure en un rectangle $[0, a] \times [0, 1]$ (“base” de la fonction) et un triangle. L’aire du rectangle est
$$a \cdot 1 = a,$$
et l’aire du triangle est
$$\frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}.$$
On additionne ce deux grandeurs pour avoir l’aire cherchée.

Exercice 5 (10 points)

a) Faux. Soit f la fonction de $[0, 1]$ à $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
On peut vérifier que $s(f) = S(f) = 0$. Ainsi, f est intégrable, mais elle n’est cependant pas continue en $x = \frac{1}{2}$.

b) Faux. On a vérifié dans l’exercice que la fonction indicatrice d’appartenance aux rationnels n’est pas intégrable sur $[0, 1]$.

c) Vrai. Cette hypothèse est dans la définition d’intégrable. (Bien qu’il soit possible d’étendre la définition de fonction intégrable pour que l’intégrale d’une fonction non-bornée soit définie.)

d) Faux. On se reporte à nouveau à l’exercice .

e) Faux. Les bornes de l’intervalle doivent être dans la subdivision.

f) Vrai.

g) Faux. Le pas est la plus *grande* distance entre deux points successifs.

h) Vrai. Cf point précédent.

i) Faux. Archimède est né en -287 à Syracuse en Sicile. Mais la Sicile n’entre qu’en 1861 dans l’Italie. En fait, en -287, le concept même d’Italie n’avait pas de sens.

Exercice 6 (10 points)

a) On a

$$\begin{aligned} s_{\sigma_n}(e^x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} e^{a+\frac{i(b-a)}{n}} \\ &= \frac{(b-a)e^a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{b-a}{n}\right)} \\ &= \frac{(b-a)e^a}{n} \cdot \frac{e^{b-a}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}. \end{aligned}$$

b) Comme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{x(b-a)}-1} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(b-a)e^{x(b-a)}} = \frac{1}{b-a}, \end{aligned}$$

on a

$$s(e^x) = e^b - e^a.$$

c) On applique la proposition 3.4 des notes de cours : *Toute fonction réelle continue définie sur* $[a, b]$ *est intégrable.*

Exercice 7 (5 points)

On peut facilement vérifier que la limite des sommes de Darboux inférieures et supérieures vaut 1, cependant la fonction n'est pas continue en $x = 1$.

Exercice 8 (10 points)

a) On a

$$C = \left(\frac{a+b}{2}, -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right).$$

Plutôt que de calculer directement l'aire du triangle ABC, on commence par calculer l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$, donc on va calculer l'aire du parallélogramme de sommets

$$A,\ B,\ A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB},\ C.$$

On note cette aire

$$\text{aire}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

On sait de la géométrie vectorielle que

$$\text{aire}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}).$$

On a

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} - a \\ -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-a \\ -b^2 + a^2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous permet d'obtenir (après simplification)

$$\text{aire}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}(b-a)^3.$$

Il nous faut encore diviser cette aire par 2 pour obtenir l'aire du triangle ABC. On a donc la réponse voulue.

b) On utilise le point précédent. On peut le reformuler comme : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Si $z = \frac{x+y}{2}$, on a

$$\text{aire du triangle } (x, -x^2), (y, -y^2), (z, -z^2) = \frac{(y-x)^3}{8}.$$

Ainsi, en utilisant cette égalité pour $x = a$ et $y = a + \frac{b-a}{2}$, on a

$$\text{aire du triangle } ACD = \frac{\frac{(b-a)^3}{2^3}}{8} = \frac{S}{8},$$

comme voulu.

On procède de même pour le triangle BCE.

c) En itérant la construction décrite dans les points précédents, on voit que cette somme correspond à une approximation de l'aire du secteur de parabole. De plus, par construction, cette approximation est toujours inférieure à l'aire réelle.

d) On calcule

$$\sum_{n\geq 0} S \cdot \frac{1}{4^n} = S \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} = S \cdot \frac{4}{3} = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

Pour calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}$, on a utilisé la série géométrique qui dit que, si $|q| < 1$, on a

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}.$$