Série 25

Exercice 1. Soit la fonction "racine" $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Démontre, en utilisant la définition (avec ε et δ), que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \sqrt{a}$.

b) Démontre, en utilisant la définition, que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = \sqrt{a}$.

c) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction réelle définie au voisinage de a avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. On suppose aussi qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in D$ satisfait $0 < |x - a| < \alpha$, alors $f(x) \neq b$. Démontre que dans ce cas,

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}.$$

d) Redémontre que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0}$ et que pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ et en utilisant des suites.

Exercice 2. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ à l'aide du Théorème des deux gendarmes.

Exercice 3. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2 + x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$.

Exercice 4. On inscrit dans un cercle de rayon 1 un polygone régulier à n côtés.

a) Montre que l'aire de ce polygone vaut $\frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

b) Calcule la limite de cette aire lorsque le nombre de côtés augmente.

Exercice 5. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$.

Exercice 6. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$.

Exercice 7. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$.

Exercice 8. Comment faut-il choisir les quatre nombres réels a, b, c et d pour que la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

passe par le point $(2; -2)$ et admette pour asymptotes les droites d'équation $x = -3$ et $y = -2x + 1$?

Exercice 9. Comment faut-il choisir les cinq nombres réels a, b, c, d et e pour que la fonction rationnelle

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + d)(x + e)}$$

passe par le point $(-5; 20)$ et admette pour asymptotes les droites d'équation $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$?

Exercice 10. Détermine le domaine de définition, les asymptotes et la parité des fonctions f, g, h et i données comme suit.

a) $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $g(x) = \sqrt{4x^2+3} - \sqrt{(4x+1)(x+4)}$;

c) $h(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;

d) $i(x) = x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice 11. On considère une fonction $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Donne l'ensemble de définition de f.

b) Montre que f se comporte asymptotiquement comme g donnée par $g(x) = \left|\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$.

c) Détermine la position de $f(x)$ par rapport à ses asymptotes et propose une esquisse de f dans chacun des cas que tu traites.

Remarque. Cet exercice permet d'avoir une meilleure intuition pour le comportement des fonctions du type de l'exercice précédent.